19/05/2016 *DM n° 8* | **ÉQUATIONS CARTÉSIENNES** | *1e S6*

Exercice 1 (Droite et Cercle)**.** *On se place dans une repère orthonormé.*

On considère la droite d passant par $A\,(6;6)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\,(2;2)$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B\,(3;2)$ et de rayon 5. Le but de l'exercice est de déterminer le(s) éventuel(s) point(s) d'intersection de d et $\mathcal{C}$.

1. *Montrer qu'une équation réduite de d est $y = 12 - x$, et qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.*

   Droite Soit $M(x,y)$ un point quelconque de d. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}\binom{x-6}{y-6}$ et $\overrightarrow{u}\binom{2}{2}$ sont orthogonaux, et leur produit scalaire et nul :

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} &= 0\\ (x-6)\times 2 + (y-6)\times 2 &= 0\\ 2x - 12 + 2y - 12 &= 0\\ 2y &= 24 - 2x\\ y &= 12 - x\end{aligned}$$

   Cercle Soit M un point du cercle de centre $B\,(3;2)$ et de rayon 5. Alors la distance BM vaut 5, et :

   $$\begin{aligned}BM^2 &= 25\\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 25\end{aligned}$$

Soit $M\,(x;y)$ un point appartenant à la fois à d et $\mathcal{C}$.

2. *Montrer que x vérifie $(x-3)^2+(10-x)^2=25$.* Puisque M appartient $\mathcal{C}$, ses coordonnées $(x;y)$ vérifient l'équation $\mathcal{C}$, et $(x-3)^2+(y-2)^2=25$. Mais M est dans d également, donc $y=12-x$. Utilisé dans l'équation précédente, cela donne :

$$\begin{aligned}(x-3)^2+(12-x-2)^2&=25\\(x-3)^2+(10-x)^2&=25\end{aligned}$$

3. *En déduire que x vérifie $x^2-13x+42=0$.* En partant de l'équation précédente, on a :

$$\begin{aligned}(x-3)^2+(10-x)^2&=25\\x^2-6x+9+100-20x+x^2&=25\\2x^2-26x+84&=0\\x^2-13x+42&=0\end{aligned}$$

4. *En déduire les valeurs possibles de x.* Nous obtenons un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta=(-13)^2-4\times1\times42=1$. Il est positif, donc il y a deux solutions qui sont $x_1=\frac{-(-13)-\sqrt{1}}{2\times1}=6$ et $x_2=\frac{-(-13)+\sqrt{1}}{2\times1}=7$.
5. *En déduire les coordonnées des points d'intersection de d et $\mathcal{C}$.* Puisque $y=12-x$, et que $x=6$ ou $x=7$, nous obtenons deux points d'intersection, de coordonnées respectives $\binom{6}{12-6}$ soit $\binom{6}{6}$ d'une part, et $\binom{7}{12-7}$ soit $\binom{7}{5}$ d'autre part.

Exercice 2 (Droite et Cercle)**.** *On se place dans un repère orthonormé.*

Étant donné un nombre réel α, on considère la droite d_α passant par $A\,(\alpha;\alpha)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\,(3;3)$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B\,(3;2)$ et de rayon 5.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre d_α et $\mathcal{C}$, en fonction de α.

1. *Montrer qu'une équation réduite de d_α est $y = 2\alpha - x$, et qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.*

   Droite Soit $M(x;y)$ un point quelconque de d_α. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}\binom{x-\alpha}{y-\alpha}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} &= 0\\ (x-\alpha)\times 2 + (y-\alpha)\times 2 &= 0\\ 2x - 2\alpha + 2y - 2\alpha &= 0\\ 2y &= 4\alpha - 2x\\ y &= 2\alpha - x\end{aligned}$$

   Cercle Voir la démonstration à la question 1 de l'exercice 1.

Soit $M(x;y)$ un point appartenant à la fois à d_α et $\mathcal{C}$.

2. *Montrer que x vérifie $(x-3)^2+(2\alpha - x - 2)^2 = 25$, puis que x vérifie $x^2 - (1+2\alpha)x + 2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$.* Puisque M est un point du cercle, alors $(x-3)^2+(y-2)^2 = 25$. D'autre part, puisque M est un point de la droite, alors $y = 2\alpha - x$. Donc :

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 &= 25\\ (x-3)^2 + (2\alpha - 2 - x)^2 &= 25\\ x^2 - 6x + 9 + (2\alpha-2)^2 - 2(2\alpha-2)x + x^2 &= 25\\ x^2 - 6x + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + (4-4\alpha)x + x^2 &= 25\\ 2x^2 + (4 - 4\alpha - 6)x + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 - 25 &= 0\\ 2x^2 - (2+4\alpha)x + 4\alpha^2 - 12 - 8\alpha &= 0\\ x^2 - (1+2\alpha)x + 2\alpha^2 - 6 - 4\alpha &= 0\end{aligned}$$

Puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur de y, le nombre de points d'intersection de d_α et $\mathcal{C}$ est égal au nombre de solutions de cette équation du second degré en x, et ce nombre dépend du signe du discriminant. Étudions ce discriminant Δ.

3. *Montrer que $\Delta = -4\alpha^2 + 20\alpha + 25$.*

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-\left(1+2\alpha\right)\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(2\alpha^2 - 6 - 4\alpha\right) \\ &= 1 + 4\alpha + 4\alpha^2 - 8\alpha^2 + 24 + 16\alpha \\ &= -4\alpha^2 + 20\alpha + 25\end{aligned}$$

4. *Montrer que le signe de Δ, en fonction de α, est :*

α	$-\infty$		$\frac{5-5\sqrt{2}}{2}$		$\frac{5+5\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous obtenons un trinôme du second degré en α, de discriminant $20^4 - 4 \times (-4) \times 25 = 800 = 2 \times 20^2$. Il est positif, donc le trinôme a deux racines $\alpha_2 = \frac{-20-\sqrt{2\times 20^2}}{2\times -4} = \frac{-20-20\sqrt{2}}{-8} = \frac{5+5\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha_1 = \frac{-20+\sqrt{2\times 20^2}}{2\times -4} = \frac{-20+20\sqrt{2}}{-8} = \frac{5-5\sqrt{2}}{2}$. Nous obtenons donc le tableau de signes demandé.

5. *En déduire le nombre de points d'intersection de d_α et $\mathcal{C}$ en fonction de α.* Trois cas sont possibles :
   — si $\alpha \in \left]\alpha_1 ; \alpha_2\right[$, alors Δ est strictement positif, le trinôme en x a deux solutions, et la droite et le cercle ont deux points d'intersection ;
   — si $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$, alors Δ est nul, le trinôme en x a une seule solution, et la droite et le cercle ont un seul point d'intersection (dans ce cas, la droite est tangente au cercle) ;

— enfin, si $\alpha < \alpha_1$ ou $\alpha > \alpha_2$, alors Δ est strictement négatif, le trinôme en x n'a pas de solutions, et la droite et le cercle n'ont aucun points d'intersections (la droite est extérieure au cercle).