21/04/16
DM n° 7

Suites numériques

$1^{e}S6$

Exercice 1 (Pyramide)**.**

1. *Une petite fille empile ses cubes comme indiqué sur la figure de gauche (chaque étage contient deux fois plus de cubes que l'étage du dessus). On appelle u_n le nombre de cubes du n^e étage (en commençant par le haut : $u_1 = 1$).*
   (a) *Donner les trois premiers termes de la suite u.* $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$.
   (b) *Quelle est la nature de u ? Donner alors ses caractéristiques.* Chaque étage contient deux fois plus de cubes que le précédent, donc c'est une suite géométrique de raison 2, et de premier terme 1.
   (c) *Calculer u_{10}. Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite.*
   Le 10^{e} terme u_{10} est égal à $1 \times 2^{10-1} = 512$.
   La somme des dix premiers termes est premier terme$\times \frac{1-q^{\text{nombre de term}}}{1-q}$
   $1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023$.
   (d) *Elle dispose de 1000 cubes et construit la plus grande pyramide possible. Combien d'étage y aura-t-il ? Combien de cubes seront utilisés ?* Dix étages nécéssitent 1023 cubes, ce qui est trop. Neuf étages nécessitent $1 \times \frac{1-2^9}{1-2} = 511$ cubes. C'est donc le nombre d'étage maximum de la pyramide, composée de 511 cubes.
2. *Trouvant sa pyramide trop petite, elle recommence en prenant cette fois le modèle de droite (chaque étage contient deux cubes de plus que l'étage du dessus). On appelle v_n le nombre de cubes du n^e étage (en commençant par le haut : $v_1 = 1$).*

(a) *Donner les trois premiers termes de la suite v.* $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 5$.

(b) *Quelle est la nature de v ? Donner alors ses caractéristiques.* Chaque terme de la suite est égal au précédent auquel on ajoute deux. La suite est donc arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

(c) *Calculer v_{10}. Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite.*

Le 10$^{\text{e}}$ terme v_{10} est égal à $1 + 2 \times (10 - 1) = 19$.

La somme des 10 premiers termes est $10 \times \frac{v_1 + v_{10}}{2} = 10 \times \frac{1+19}{2} = 100$.

(d) *Elle dispose de 1000 cubes et construit la plus grande pyramide possible. Combien d'étage y aura-t-il ? Combien de cubes seront utilisés ?* Soit n le nombre d'étages. Sa pyramide est composée de $n \times \frac{v_1 + v_n}{2} = n \times \frac{1+1+2(n-1)}{2} = n^2$. On cherche donc la plus grande valeur entière de n telle que $n^2 \leqslant 1000$, c'est-à-dire $n \leqslant \sqrt{1000}$, ou $n \leqslant 31,7$. Donc $n = 31$.

La pyramide contient alors $31 \times \frac{1+1+2\times(31-1)}{2}$ cubes, soit 961 cubes.

Exercice 2 (Crédit à la consommation)**.** *Une personne rencontrant des difficultés financières qu'elle considère passagère contracte un crédit à la consommation. L'objet de l'exercice est de déterminer (i) quelle va être la durée de son prêt ; (ii) quelle sera la somme totale remboursée.*

Cette personne a emprunté 10 000 €. Chaque mois, sa dette augmente de 1 % (intérêts), et elle rembourse 300 euros.

On appelle u_n *la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par : pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, u_n *est la somme d'argent à rembourser à la fin du* n^e *mois. Ainsi* $u_0 = 10000$ *;* u_1 *est cette somme à laquelle s'ajoute 1 % d'intérêts, et à laquelle on soustrait 300, etc.*

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_{n+1} = 1,01u_n - 300$.
   Soit u_n la somme à rembourser à la fin d'un certain mois n. Au mois suivant, les intérêts s'élèvent à 1 %, soit $0,01u_n$, et la personne rembourse 300 €. Donc $u_{n+1} = u_n + 0,01u_n - 300 = 1,01u_n - 300$.
2. *Étude préliminaire de* u
   (a) *Calculer* u_1, u_2, u_3. $u_1 = 1,01 \times 10000 - 300 = 9800$; $u_2 = 1,01 \times 9800 - 300 = 9598$; $u_3 = 1,01 \times 9598 - 300 = 9393,98$.
   (b) *La suite* u *est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?*
   - $u_1 - u_0 = -200$ mais $u_2 - u_1 = -202$, donc la suite n'est pas arithmétique.
   - $\frac{u_1}{u_0} = 0,98$ mais $\frac{u_2}{u_1} \approx 0,979$, donc la suite n'est pas géométrique.
3. *Suite auxiliaire : Soit* v *la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $v_n = u_n - 30\,000$.
   (a) *Calculer* v_0, v_1, v_2, v_3.
   $v_0 = u_0 - 30000 = 10000 - 30000 = -20000$; $v_1 = -20200$; $v_2 = -20402$; $v_3 = -20606,02$.
   (b) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $v_{n+1} = 1,01v_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 30\,000 \\ &= 1,01u_n - 300 - 30\,000 \\ &= 1,01u_n - 0,01 \times 30\,000 - 30\,000 \\ &= 1,01u_n - 1,01 \times 30\,000 \\ &= 1,01\,(u_n - 30\,000) \\ &= 1,01v_n \end{aligned}$$

(c) *En déduire la nature de la suite v, ainsi que ses caractéristiques. Donner alors le terme général de v_n, puis calculer v_{24}.* Donc la suite v est une suite géométrique de raison $1,01$, et de premier terme $v_0 = -20000$. Son terme général est $v_n = -20000 \times 1,01^n$, et $v_{24} = -20000 \times 1,01^{24} \approx -25394,29$.

4. *Étude de u.*

   (a) *En utilisant la question précédente, et la relation entre u et v définie à la question 3, déterminer le terme général de la suite u.* Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n - 30000$, alors $u_n = v_n + 30000$. D'autre part, $v_n = -20000 \times 1,01^n$. Donc $u_n = -20000 \times 1,01^n + 30000$.

   (b) *Calculer u_{24}, et en déduire la somme d'argent qu'il reste à rembourser au bout de deux ans.* $u_{24} = -20000 \times 1,01^{24} + 30000 \approx 4605,31$. Il restera donc, au bout de deux ans, 4 605,31 € à rembourser.

   (c) *À partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n \leqslant 0$?* Puisque vous n'avez pas encore les outils pour résoudre « proprement » ce type de question, il faut faire cela en tatonnant (essayer plusieurs valeurs de n jusqu'à trouver la bonne). On trouve : $u_{41} \approx -75,05$ (et $u_{40} > 0$).

5. *Remboursement.*

   (a) *En déduire combien de temps sera nécessaire au remboursement complet du prêt.* Il faudra donc 41 mois, soit trois ans et cinq mois pour rembourser le prêt.

   (b) *Quel sera alors le montant total des intérêts (en d'autres termes, combien d'argent aura été remboursé* en plus *des 10 000 € empruntés) ?* Chaque mois (sauf le dernier) 300 € ont été versés à la banque. Le dernier mois, le dernier versement a été de 222,73 € (car $u_{40} \approx 222,73$). La somme totale versée à la banque est donc $300 \times 40 + 222,73 = 12222,73$. La somme versée *en plus* de la somme empruntée est donc $12222,73 - 10000 =$2 222,73 €.