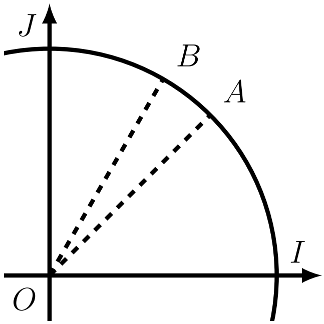
Exercice 1 (Jeu infini)**.** *Corrigé à l'oral.*

Exercice 2 (Valeurs remarquables)**.** *Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{12}$.

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé (O, I, J)*. On considère les points* A *et* B*, tels que* $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{4}$ *et* $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}$.



1. (a) *Rappeler les valeurs exactes de* $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, *et* $\sin\frac{\pi}{3}$.
   On a : $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b) *Déterminer les coordonnées de* A *et* B. Par définition du sinus et du cosinus, puisque A et B sont sur le cercle trigonométrique, alors $A\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$.

   (c) *En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire, montrer que* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= x_{\overrightarrow{OA}}x_{\overrightarrow{OB}}+y_{\overrightarrow{OA}}y_{\overrightarrow{OB}}\\ &=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\\ &=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}\times 1}{4}\\ &=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}\end{aligned}$$

2. (a) *Démontrer, de manière aussi rigoureuse que possible, que* $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{12}$. Toutes les mesures d'angles sont données à $2k\pi$ près (pour $k\in\mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)&=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)\\&=-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)\\&=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\\&=-\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\\&=\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

(b) *Exprimer le produit scalaire* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ *en fonction de* $\cos\frac{\pi}{12}$. On applique l'expression du produit scalaire avec les cosinus, en remarquant que puisque A et B sont sur le cercle trigonométrique, $OA=OB=1$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}&=OA\times OB\times\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

3. *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{12}$. Nous avons calculé le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ de deux manières différentes, et avons obtenu d'une part $\cos\frac{\pi}{12}$, et d'autre part $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$. Donc ces deux valeurs sont égales, et :

$$\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}=\cos\frac{\pi}{12}$$