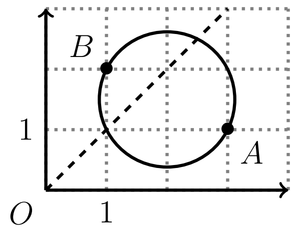
29/01/2016
DM n^o^ 5

Produit scalaire

1^e^S6

Exercice 1 (Lieu géométrique)**.**

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;1)$ et $B(1;2)$, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, et la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = x$.



L'objet de l'exercice est de déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. On appelle $M\,(x;y)$ ces points, et on admet que M n'est ni A ni B.

1. *Étude du cercle $\mathcal{C}$.*
   (a) *Justifier que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.* Puisque AMB est un triangle dont le cercle circonscrit a pour diamètre $[AB]$, alors il est rectangle en M, et l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

   (b) *En déduire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.* L'angle $\widehat{AMB}$ est droit, donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul.

   (c) *Montrer que $(x-3)\,(x-1) + (y-1)\,(y-2) = 0$.* Les coordonnées des vecteurs sont respectivement $\overrightarrow{AM}\,(x-3; y-1)$ et $\overrightarrow{BM}\,(x-1; y-2)$. Le repère est orthonormé, donc leur produit scalaire est donné par la formule $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = (x-3)(x-1) + (y-1)(y-2)$. Puisque le produit scalaire est nul, alors $(x-3)(x-1) + (y-1)(y-2) = 0$.

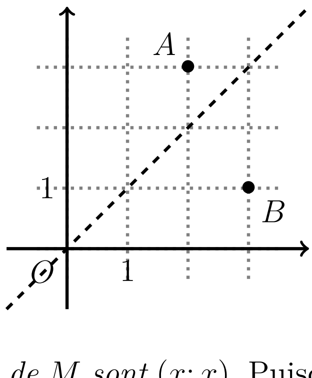
2. *Puisque $M \in \mathcal{D}$, en déduire que $(x-1)(2x-5) = 0$.* Le point M est sur la droite $\mathcal{D}$, donc $y = x$. En reprenant l'équation de la question précédente, nous avons :

$$\begin{aligned}
(x-3)(x-1)+(y-1)(y-2) &= 0 \\
(x-3)(x-1)+(x-1)(x-2) &= 0 \\
(x-1)\left[(x-3)+(x-2)\right] &= 0 \\
(x-1)(x-3+x-2) &= 0 \\
(x-1)(2x-5) &= 0
\end{aligned}$$

3. *En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.* Les coordonnées du point M vérifient $(x-1)(2x-5) = 0$. C'est une équation produit, équivalente à $x-1 = 0$ ou $2x-5 = 0$. Les solutions sont donc $x = 1$ ou $x = 2,5$. Puisque $x = y$, les coordonnées possibles de M sont donc $(1;1)$ et $(2,5;2,5)$.

Exercice 2 (Lieu géométrique)**.**

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(2;3)$, et $B\,(3;1)$. On appelle $M\,(x;y)$ un point de la droite d'équation $y = x$.



1. *Justifier que les coordonnées de M sont $(x;x)$.* Puisque M est sur la droite d'équation $y = x$, alors $y = x$.
2. *Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ en fonction de x, puis montrer que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = (x-3)(2x-3)$.*

Les coordonnées des vecteurs sont $\overrightarrow{AM}(x-2; y-3)$ et $\overrightarrow{BM}(x-3; y-1)$, donc :

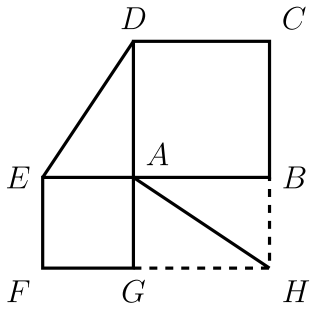
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} &= (x-2)(x-3) + (y-3)(y-1) \\
&= (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) \\
&= (x-3)\left[(x-2) + (x-1)\right] \\
&= (x-3)(x-2+x-1) \\
&= (x-3)(2x-3)
\end{aligned}$$

3. *Résoudre $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.* D'après la question précédente, cette équation est équivalente à $(x-3)(2x-3) = 0$. C'est une équation produit, elle-même équivalente à $x-3=0$ ou $2x-3=0$. Donc les solutions sont $\{3; 1,5\}$.
4. *En déduire les coordonnées possibles de M pour lesquelles les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires.* Si M est égal à A ou B, alors l'une des deux droites (AM) ou (BM) n'est pas définie. Donc M est différent de A et B. De plus, puisque les deux droites sont perpendiculaires, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul. Donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$. Nous avons montré que cette équation est équivalente à $x=3$ ou $x=1,5$, donc l'abscisse de M est 3 ou 1,5. Enfin, puisque M est sur la droite d'équation $y=x$, alors les coordonnées possibles de M, point d'intersection des deux droites (AM) et (BM) sont $(1,5; 1,5)$ et $(3; 3)$.

Exercice 3 (Perpendicularité)**.**

On considère la figure ci-contre. $ABCD$ et $AEFG$ sont des carrés, et $ABHG$ est un rectangle.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (ED) et (AH) sont perpendiculaires.



1. *En introduisant respectivement les points A et B dans les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AH}$, montrer que $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}$.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} &= \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right)\\ &= \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}\end{aligned}$$

Or les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux (car (BH) est parallèle à (AG), elle même perpendiculaire à (EA)), donc leur produit scalaire est nul, de même que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$. Donc il ne reste plus que $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}$.

2. *En déduire que $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = 0$.* Puisque les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens, leur produit scalaire est égal à $EA \times AB$. De même, les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de sens contraire, donc leur produit scalaire est égal à $-BH \times AD$. Mais $BH = EA$ et $AD = AB$, donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} = -EA \times AB$. Donc $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = EA \times AB - EA \times AB = 0$.

3. *En déduire que (ED) et (AH) sont perpendiculaires.* Le produit scalaire $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH}$ est nul, donc les vecteurs (qui sont non nuls) $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux, et les droites (ED) et (AH) sont perpendiculaires.