

Exercice 1 (Calcul de fonction dérivées).

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur \mathbb{R} , et a un réel.

(a) Montrer que pour un réel h non nul, le taux d'accroissement en a est égal à $2a + h$. Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= 2a + h\end{aligned}$$

(b) En déduire la valeur de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (en fonction de a), et donc la valeur de $f'(a)$. Lorsque h tend vers 0, $2a + h$ tend vers $2a$. Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a$. Nous avons montré que $f'(a) = 2a$.

(c) Application : Calculer $f'(2)$, et tracer dans un repère orthonormé la courbe de f (sur l'intervalle $[0; 4]$), ainsi que sa tangente en 2. Le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = 2 \times 2 = 4$. Voir le graphique à la fin.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur \mathbb{R}^* , et a un réel non nul.

(a) Montrer que pour un réel h non nul (et tel que $a+h \neq 0$),

le taux d'accroissement en a est égal à $-\frac{1}{a(a+h)}$.

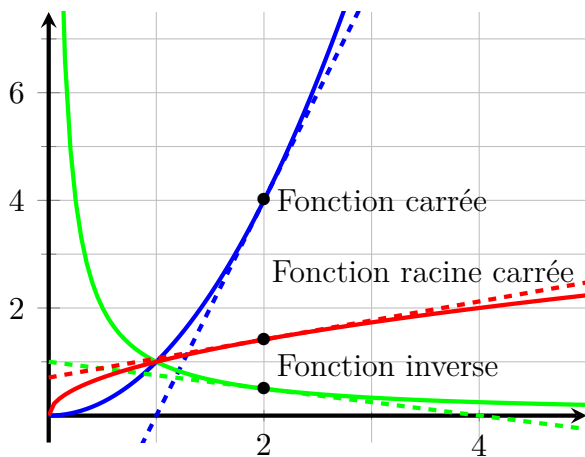
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} \\ &= -\frac{1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

- (b) Même énoncé que la question 1b. Lorsque h tend vers 0, $a+h$ tend vers a , donc $-\frac{1}{a(a+h)}$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$. Donc $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
- (c) Même énoncé que la question 1c. Le nombre dérivé de f en 2 est : $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$. Voir le graphique à la fin.
3. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur \mathbb{R}^+ , et a un réel strictement positif.
- (a) Montrer que pour un réel h non nul (et tel que $a+h \geq 0$), le taux d'accroissement en a est égal à $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+h}}$.

Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
 \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\
 &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\
 &= \frac{\sqrt{a+h}^2 - \sqrt{a}^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

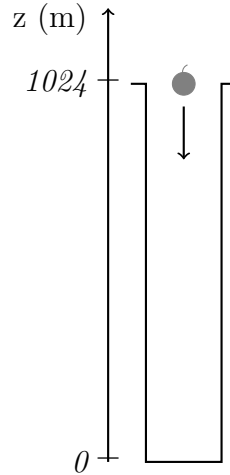
- (b) *Même énoncé que la question 1b.* Lorsque h tend vers 0, $\sqrt{a+h}$ tend vers \sqrt{a} , donc le taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.
- (c) *Même énoncé que la question 1c.* Le nombre dérivé de f en 2 vaut : $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,35$. Voir le graphique ci-dessous.



Exercice 2 (Application à la physique).

Isaac voudrait déterminer la valeur de g , intensité de la pesanteur, chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puits d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de 1024m, et chronomètre son temps de chute.

L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puits : elle est de 0m au fond, et 1024m en haut.



Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme $z : t \mapsto at^2 + bt + c$, où t est le temps de chute. Par exemple, $z(0)$ est l'altitude initiale, et $z(3)$ est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a , b et c , pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g .

- (1) Combien vaut l'altitude initiale $z(0)$? En déduire que $c = 1024$. Au départ, la pomme est au sommet du puit, donc $z(0) = 1024$. En utilisant l'expression de z , on trouve que $z(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $c = 1024$.
- (2) La vitesse v de la chute est égale à la dérivée de la fonction z . Par exemple, $v(2) = z'(2)$ est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.
 - (a) Dériver z , et en déduire l'expression de v en fonction de a et b . Puisque z est un polynôme, on a : $z'(t) = 2at + b$. Donc $v(t) = z'(t) = 2at + b$.
 - (b) Quelle est la vitesse initiale ? En déduire que $b = 0$. La pomme est lâchée du sommet, donc $v(0) = 0$. Or $v(0) = 2a \times 0 + b = b$. Donc $b = 0$.

(c) *Exprimer z et v en fonction de a et t . Donc :*

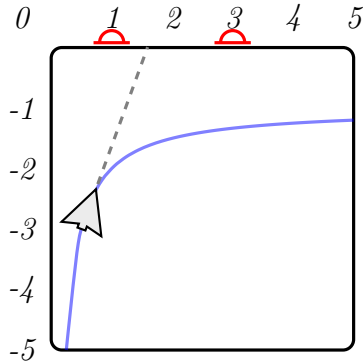
$$v(t) = 2at$$

$$z(t) = at^2 + 1024$$

- (3) *Isaac, aidé de Gottfried, a mesuré que la chute a duré 14,5s. Traduire cette information par une équation, et montrer que $a = -4,87$. La chute s'arrête lorsque la pomme atteint le fond du puits, c'est-à-dire quand $z(t) = 0$. Donc, $z(14,5) = 0$, et $a \times 14,5^2 + 1024 = 0$. Donc $a = -\frac{1024}{14,5^2} \approx -4,87$.*
- (4) *Calculer la dérivée de v ; c'est une constante égale à $-g$. Conclure en déterminant la valeur de g . La dérivée de v est $v'(t) = 2a \approx 2 \times (-4,87) \approx -9,74$. Donc $-g \approx -9,74$, et $g = 9,74$.*

Exercice 3 (Tangente et Jeu vidéo). La figure ci-dessous représente un écran de jeu vidéo. Un avion remonte l'écran de gauche à droite en suivant la courbe d'équation $y = -1 - \frac{1}{x}$

L'avion peut tirer des missiles selon la tangente à sa trajectoire.



En quels points de sa trajectoire l'avion doit-il tirer ses missiles pour abattre successivement les deux monstres situés en haut de l'écran en $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), B\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$?

Pour une abscisse a donnée, l'avion tire un missile selon la tangente à sa trajectoire. Donc la trajectoire du missile a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (où f est la fonction représentant la trajectoire de l'avion). Il faut donc calculer la dérivée de f . Puisque la dérivée d'une constante est nulle, on a : $f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$.

L'équation de la tangente est donc :

$$\begin{aligned}
 y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{1}{a^2}(x - a) - 1 - \frac{1}{a} \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{x - a}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} - \frac{a}{a^2} \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{x - a - a^2 - a}{a^2} \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{-a^2 - 2a + x}{a^2}
 \end{aligned}$$

Supposons que le missile, lancé depuis l'avion au point d'abscisse a , atteigne le monstre en $A\binom{1}{0}$. Cela signifie que ce monstre est sur sa trajectoire, c'est-à-dire que le point appartient à la tangente à la trajectoire de l'avion. C'est-à-dire :

$$0 = \frac{-a^2 - 2a + 1}{a^2}$$

Puisque a est strictement positif (la trajectoire de l'avion n'est définie que pour $a > 0$), l'équation est équivalente à

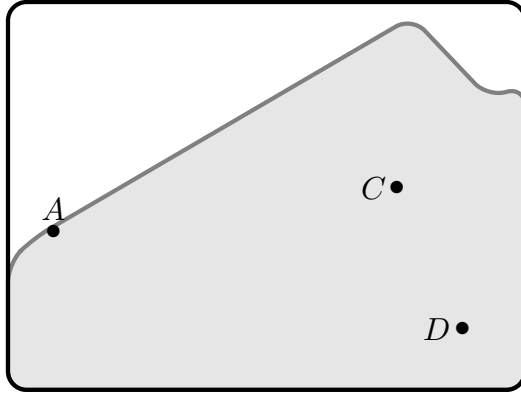
$$0 = -a^2 - 2a + 1$$

C'est un trinôme du second degré. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$. Il est positif, donc l'équation a deux solutions $a_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times -1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = \sqrt{2} - 1$ et $a_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times -1} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -\sqrt{2} - 1$. Or cette dernière valeur est négative, donc exclue. Il n'y a donc qu'une seule solution $a_1 = \sqrt{2} - 1$.

Pour toucher le premier monstre, l'avion doit donc avoir comme abscisse $\sqrt{2} - 1$, et comme ordonnée $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (que l'on peut simplifier en $-2 - \sqrt{2}$).

De même, en appliquant le même raisonnement au second monstre, on trouve que l'avion doit être en $\binom{1}{-2}$ pour l'atteindre.

Exercice 4 (Droites et Jeu vidéo). *Chaïma joue au jeu vidéo Well Well Well Drilling. Son personnage, situé sur le flanc d'une montagne, doit forer des puits, en ligne droite, afin d'exploiter différentes ressources.*



Sur son écran représenté ci-dessus, le flanc de la montagne est principalement constitué d'une pente rectiligne passant par $A(90; 312)$ et de pente 60% . Un filon de coltan est situé en $C(770; 400)$ et un autre de diamant en $D(900; 120)$ (le repère considéré a pour origine le coin inférieur gauche de l'écran, les axes sont les bords inférieur et gauche de l'écran, et l'unité est le pixel).

Pour obtenir le trophée « Foreuse économe », Chaïma doit, en un seul forage, traverser à la fois le filon de coltan et celui de diamant. Quelles sont alors les coordonnées du point à partir duquel son personnage doit forer, et quel angle doit former le puits avec l'horizontale ?

Appelons F le point où Chaïma doit forer. Ce point doit être à la fois sur le plan de la montagne, et aligné avec C et D (c'est-à-dire sur la droite (CD)).

Équation du flanc de la montagne. Commençons par déterminer l'équation du flanc de la montagne : c'est une droite, donc de la forme $y = mx + p$. Nous savons que la pente est 60% , donc $y = 0,6x + p$. Enfin, nous savons que le point $A(90; 312)$ appartient

à cette droite, donc $312 = 0,6 \times 90 + p$. En résolvant cette équation, nous trouvons $p = 258$. L'équation est donc $y = 0,6x + 258$.

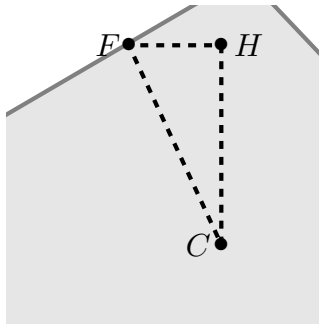
Équation de (CD). Déterminons l'équation de (CD). Son coefficient directeur vaut $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{120 - 400}{900 - 770} = -\frac{28}{13}$. L'équation de la droite est donc de la forme $y = -\frac{28}{13}x + p$. De plus, puisque D est sur cette droite, ses coordonnées vérifient l'équation, donc $120 = 900 \times -\frac{28}{13} + p$, ce qui nous donne $p = \frac{26760}{13}$. L'équation de la droite est donc $y = -\frac{28}{13}x + \frac{26760}{13}$.

Recherche des coordonnées de F. Puisque F est sur le flanc de la montagne, et sur la droite (CD), ses coordonnées vérifient les deux équations.

$$\begin{cases} y = 0,6x + 258 \\ y = -\frac{28}{13}x + \frac{26760}{13} \end{cases}$$

Une fois ce système résolu, nous obtenons environ : $F(654; 650)$. Reste à déterminer l'angle auquel forer.

Calcul de l'angle. En zoomant sur la partie qui nous intéresse, nous obtenons ceci.



Ajoutons un point H à la verticale de C et à l'horizontale de F. Ses coordonnées sont donc $H(770; 650)$ (la même abscisse que C, et la même ordonnée que F). Puisque l'angle qui nous intéresse est l'angle de (FC) par rapport à l'horizontale, c'est la mesure de

l'angle \widehat{HFC} que nous voulons calculer. Un peu de trigonométrie dans le triangle FHC , rectangle en H , va nous donner la solution.

$$\tan \widehat{HFC} = \frac{HC}{FH}$$

$$\widehat{HFC} = \arctan \frac{HC}{FH}$$

$$\widehat{HFC} = \arctan \frac{650 - 400}{770 - 654}$$

$$\widehat{HFC} \approx 65^\circ$$

Conclusion. Il faut forer à partir du point $F(654, 650)$, avec un angle d'environ 65° (vers le bas) avec l'horizontale.