Vecteurs et Droites

Exercice 1 (Programmation linéaire)**.** Baccalauréat STG Mercatique, Polynésie, juin 2008.

Monsieur François va ouvrir un marché « puces et brocante » sur son terrain. Il y a délimité 120 emplacements. L'installation des exposants commencera à 6 h, le dernier exposant devra avoir fini de s'installer à 8 h. Il prévoit que chaque exposant arrivant :

— *avec une voiture, paiera 10 euros de redevance et disposera de deux emplacements pour installer son stand,*

— *avec un fourgon, paiera 16 euros de redevance et disposera de trois emplacements.*

Il faut en moyenne 1 min à une voiture pour se garer et 4 min à un fourgon. Pour des raisons de. sécurité, chaque exposant ne peut commencer à se garer que lorsque le précédent a fini de se garer.

Monsieur François souhaite déterminer le nombre de voitures et le nombre de fourgons nécessaires pour que sa recette soit maximale.

Partie A : *On note x le nombre de voitures et y le nombre de fourgons.*

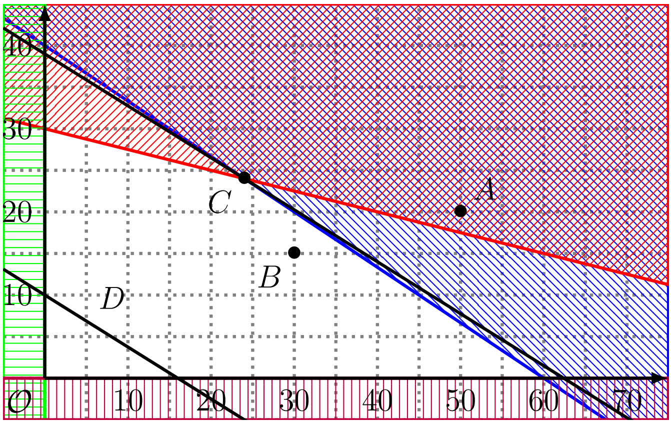
1. *Écrire un système d'inéquations correspondant aux contraintes du problème.* Tout d'abord, le nombre de voitures et de fourgons est positif. Donc $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Ensuite, puisqu'il y a 120 emplacements, que les voitures prennent deux emplacements et les fourgons trois emplacements, on a $2x + 3y \leqslant 120$. Enfin, puisque chaque voiture met une minute à s'installer et chaque fourgon quatre minutes, et que tous disposent de deux heures (soit 120 minutes) au total pour s'installer, cela donne $x + 4y \leqslant 120$. Le système est donc :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 2x+3y & \leqslant & 120 \\ x+4y & \leqslant & 120 \end{array}\right.$$

2. *Sur une feuille quadrillée, déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système (S) suivant*

avec comme unité graphique 1 cm pour 5 unités sur les deux axes. On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ y & \leqslant & -\dfrac{2}{3}x+40 \\ y & \leqslant & -\dfrac{1}{4}x+30 \end{array}\right.$$



3. *Après avoir justifié le lien entre les questions 1 et 2, préciser si Monsieur François peut accueillir :*
   (a) *50 voitures et 20 fourgons ?*
   (b) *30 voitures et 15 fourgons ?*
   (c) *24 voitures et 24 fourgons ?*

   En isolant le y dans l'inéquation $2x+3y \leqslant 120$, on obtient $y \leqslant -\frac{2}{3}x+40$; de même, en isolant le y dans l'inéquation $x+4y \leqslant 120$, on obtient $y \leqslant -\frac{1}{4}x+30$. Les systèmes décrits dans les questions 1 et 2 sont donc équivalents.

   (a) *50 voitures et 20 fourgons* Le point A de coordonnées $(50;20)$ est dans la partie hachurée. Ça n'est donc pas une solution du système, et monsieur François ne peut pas accueillir ces véhicules.

   (b) *30 voitures et 15 fourgons* Le point B de coordonnées $(30;15)$ n'est pas dans la partie hachurée. C'est une solution du système, et monsieur François peut accueillir ces véhicules.

(c) *24 voitures et 24 fourgons* Le point C de coordonnées $(24; 24)$ n'est pas dans la partie hachurée (il est à la limite). Monsieur François peut donc accueillir ces véhicules.

Partie B : *On note R la recette de la journée*

1. *Exprimer R en fonction de x et y.* Chaque voiture rapporte 10 € et chaque fourgon 16 €, donc la recette R vaut $R = 10x + 16y$.
2. *Montrer que la droite D d'équation $y = -\dfrac{5}{8}x+10$ correspond à une recette de 160 euros.* En reprenant l'équation de la question précédente, le couple (x, y) rapporte 160 euros (en supposant qu'il soit valide) si $160 = 10x + 16y$. En isolant le y, on obtient $y = -\frac{5}{8}x + 10$.
3. (a) *Représenter la droite D dans le repère précédent.* Voir la figure.

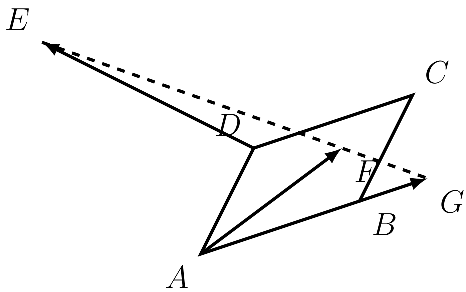
   (b) *Trouver le couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ qui permet d'obtenir la recette maximale.* On a montré que pour une recette R, le couple $(x; y)$ vérifie $R = 10x + 16y$. En isolant y dans cette équation, cela donne $y = -\frac{5}{8}x + \frac{R}{16}$. Nous remarquons que cette droite a le même coefficient directeur que D : elles sont donc parallèles. Nous remarquons également que faire augmenter la valeur de R dans l'équation de la droite fait augmenter l'ordonnée à l'origine.

   Nous recherchons donc une droite parallèle à D, avec la plus grande ordonnée à l'origine possible, et qui passe par la zone non-hachurée. Elle est représentée sur le graphique, et l'unique point de cette droite qui vérifie le système est $(24; 24)$.

   (c) *Calculer alors cette recette maximale et répondre au problème posé.* Nous avons trouvé que le couple $(x; y)$ correspondant à la recette maximale est $(24; 24)$. Puisque ces coordonnées sont celles d'un point de la droite, le nombre R vérifie $R = 10 \times 24 + 16 \times 24 = 624$. La recette maximale est donc 624 €.

Exercice 2 (Alignement)**.** *On considère un parallélogramme $ABCD$, et les points E, F, G définis par les relations : $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.*

1. *Faire une figure.*



2. *Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.* Dans ces calculs, nous essayons la relation de Chasles et la propriété des parallélogrammes (à savoir : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} \\ &= -2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= -2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) - \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{8}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \\ &= -2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} \\ &= -2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) - \overrightarrow{AD} + \frac{10}{7}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{24}{7}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

3. *En déduire les coordonnées de ces mêmes vecteurs dans le repère* $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Donc, par définition des coordonnées, on a : $\overrightarrow{EF}\left(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ et $\overrightarrow{EG} = \left(\frac{24}{7}; -3\right)$.
4. *En déduire que les points E, F, G sont alignés.* Vérifions la condition de colinéarité :

$$\frac{24}{7} \times \left(-\frac{7}{3}\right) - \frac{8}{3} \times (-3) = -8 + 8 = 0$$

Donc la condition de colinéarité est vérifiée, et les vecteurs sont colinéaires.