05/11/15
DM nº 2

Généralités sur les fonctions

1ᵉS6

Exercice 1 (Fonction cube)**.** *On appelle* fonction cube *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^3$.

(a) *Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les variations de cette fonction sur* $\mathbb{R}$. La fonction semble strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (voir la courbe tracée à la question ((f))).

(b) *Premier cas : a et b sont de signes opposés. Justifier que, si* $a < 0 < b$, *alors* $a^3 < b^3$. Puisque $a < 0 < b$, et que a^2 et b^2 sont strictement positifs (car ce sont des carrés), alors $a^3 = a \times a^2$ est strictement négatif, et $b^3 = b \times b^2$ est strictement positif. Donc $a^3 < b^3$.

(c) *Second cas : a et b sont de même signe.*

(i) *Montrer que pour tous réels a et b, on a :*

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

(ii) *Quel est le signe de* $a^2 + ab + b^2$ *si a et b sont de même signe ?* Dans ce cas, alors le produit ab est strictement positif (si a et b sont négatifs, c'est le produit de deux nombres négatifs ; s'ils sont positifs, c'est le produit de deux nombres positifs). Donc la somme $a^2 + ab + b^2$ est strictement positive (en tant que somme de termes strictement positifs).

(d) *Déduire des questions précédentes que, pour tous réels a et b tels que* $a < b$, *on a* $a^3 < b^3$. *Conclure.*

Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$. Deux cas sont possibles.

Premier cas : a et b sont de signes différents Nous avons montré à la question ((b)) que $a^3 < b^3$.

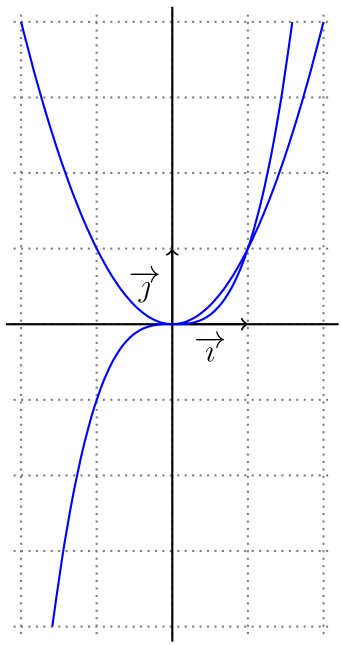
Deuxième cas : a et b sont de même signe Puisque $a < b$, alors $a - b < 0$. Or nous avons montré que $a^2 + ab + b^2 > 0$, donc $(a-b)(a^2+ab+b^2) < 0$. Donc $a^3 - b^3 < 0$, et $a^3 < b^3$.

Dans les deux cas, si $a < b$, alors $a^3 < b^3$: la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(e) *Établir le tableau de variation de la fonction cube.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

(f) *Tracer sur l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions carré et cube. Étudier (par le calcul) les positions relatives de ces deux courbes.*



La courbe de la fonction carrée est strictement au dessus de celle de la fonction cube si et seulement si $x^2 > x^3$.

$$x^2 > x^3$$
$$x^2 - x^3 > 0$$
$$x^2(1-x) > 0$$

Si x est nul ou égal à 1, alors $x^2 = x^3$, et les deux courbes sont confondues. Sinon, x^2 est strictement positif, et donc $x^2(1-x) > 0$ si et seulement si $1 - x > 0$, c'est-à-dire si $x < 1$. Donc les courbes des deux fonctions sont confondues en 0 et 1, et la courbe de la fonction carrée est au dessus (strictement) de celle de la fonction cube si et seulement si $x < 1$.

Exercice 2 (Fraction rationnelle et Identification)**.** *Le but de l'exercice est de déterminer les variations de la fonction définie sur* $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ *par :*

$$f : x \mapsto \frac{2x-7}{x-2}$$

Pour résoudre ce problème, nous allons exprimer la fonction f *sous la forme* $a + \frac{b}{x-2}$*, où* a *et* b *sont des nombres réels.*

(a) *Réduire l'expression* $a + \frac{b}{x-2}$ *au même démonimateur.*

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{x-2} &= \frac{a\,(x-2)}{x-2} + \frac{b}{x-2} \\ &= \frac{ax-2a}{x-2} + \frac{b}{x-2} \\ &= \frac{ax-2a+b}{x-2} \end{aligned}$$

(b) *En déduire les valeurs de* a *et* b *pour que* $a + \frac{b}{x-2} = f\,(x)$*.* On a : $a + \frac{b}{x-2} = f\,(x) = \frac{2x-7}{x-2}$. Or nous venons de démontrer que $a + \frac{b}{x-2} = \frac{ax-2a+b}{x-2}$. Donc :

$$\frac{2x-7}{x-2} = \frac{ax-2a+b}{x-2}$$

Pour que ceci soit vrai, *par identification*, on a : $2 = a$ (car $2x = ax$) et $-7 = -2a + b$, donc $b = -3$.
Donc $f\,(x) = 2 - \frac{3}{x-2}$.

(c) *En utilisant les variations des fonctions associées, en déduire les variations de la fonction* f*.*

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	↗	0	↗
$\frac{1}{x-2}$	↘	‖	↘
$-\frac{3}{x-2}$	↗	‖	↗
$2-\frac{3}{x-2}$	↗	‖	↗

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.