

**Exercice 1** (Fraction rationnelle).

1. Déterminer le signe des polynômes  $x^2 - 2x - 1$  et  $2x^2 + 3x + 1$ .

Appelons  $N$  le polynôme  $x \mapsto x^2 - 2x - 1$ . Son discriminant vaut  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8$ , donc il a deux racines  $x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 - \sqrt{2}$  et  $x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 + \sqrt{2}$ . Puisque le facteur de  $x^2$  est positif, le tableau de signes de ce polynôme est donc :

$x$	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$D(x)$	+	0	-	0	+

Appelons  $D$  le second polynôme  $x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$ . Son discriminant vaut  $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$ . Il y a donc deux racines  $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = -1$  et  $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ . Puisque le facteur de  $x^2$  est positif, le tableau de signe de ce polynôme est donc :

$x$	$-\infty$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$N(x)$	+	0	-	0	+

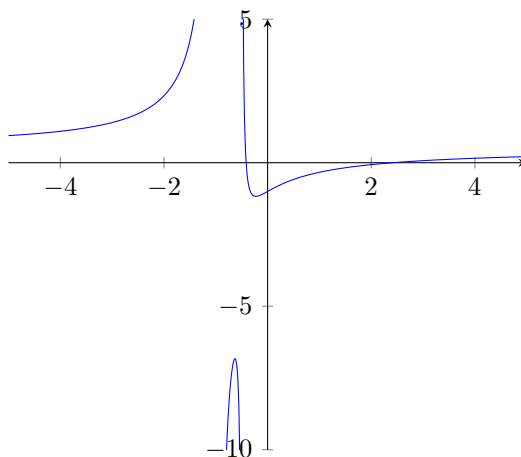
2. En déduire (i) le domaine de définition ; (ii) le signe de la fraction :  $\frac{x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1}$ .

(i) Une fraction est correctement définie si son dénominateur est non nul, c'est-à-dire si  $2x^2 + 3x + 1 \neq 0$ . Nous avons vu que les deux racines de ce polynôme sont  $-\frac{1}{2}$  et  $1$ , donc le domaine de définition de la fraction est  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; -\frac{1}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}; +\infty[$  (que l'on peut noter également  $\mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{2}\}$ ).

(ii) Pour déterminer le signe d'une fraction, on fait un tableau de signes.

$x$	$-\infty$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$			
$x^2 - 2x - 1$	+	0	+	0	-	0	+		
$2x^2 + 3x + 1$	+	0	-	0	+	+	+		
$\frac{x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1}$	+		-		+	0	-	0	+

Ça n'était pas explicitement demandé, mais il est possible de vérifier notre résultat en traçant une représentation graphique de la fonction. Cela donne la courbe suivante.



**Exercice 2** (Problème ouvert). Déterminer l'expression d'un trinôme vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i) 1 est une des racines du trinôme ;
- (ii) le sommet de sa parabole a pour abscisse 2 ;
- (iii) sa parabole passe par le point (4;6).

Il y a différentes manières de résoudre ce problème. Voici deux d'entre elles.

**Première méthode** Nous cherchons un trinôme du second degré, donc de la forme  $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ . Traduisons chacune des conditions par une équation :

- (i)  $P(1) = 0$ , soit  $a + b + c = 0$  ;
- (ii)  $-\frac{b}{2a} = 2$ , soit  $-b = 4a$  ;
- (iii)  $P(4) = 6$ , soit  $16a + 4b + c = 6$ .

C'est un système de trois équations à trois inconnues : 
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -b = 4a \\ 16a + 4b + c = 6 \end{cases}$$

Il ne reste qu'à résoudre ce système (je vous laisse faire), pour arriver à trouver comme polynôme  $2x^2 - 8x + 6$ .

**Deuxième méthode** Nous savons que 1 est une racine, et que 2 est l'abscisse du sommet de la parabole. Nous savons aussi qu'une parabole est symétrique par rapport à l'axe parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet. Donc il y a une seconde racine, qui est le symétrique de 1 par rapport à 2, c'est-à-dire 3.

La forme factorisée du trinôme est donc  $a(x-1)(x-3)$ .

Enfin, puisque la parabole passe par le point (4;6), alors  $a(4-1)(4-3) = 6$ , c'est-à-dire  $a \times 3 \times 1 = 6$ , soit  $a = 2$ .

La forme factorisée du trinôme est donc  $2(x-1)(x-3)$ .