

**Exercice 1** (Application directe — 3,5 points).

1. En utilisant le triangle de Pascal, calculer  $\binom{5}{2}$ .

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Donc  $\binom{5}{2} = 10$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n = 50$  et  $p = 0,2$ . Calculer l'espérance de  $X$ .

$$E(X) = np = 50 \times 0,2 = 10$$

**Exercice 2** (Loi binomiale — 5,5 points). Une kermesse propose le jeu suivant. Une urne contient 16 boules noires et 4 boules rouges. Le joueur tire six boules avec remise, et la partie est gagnée s'il a obtenu au moins deux boules rouges. On s'intéresse à la probabilité de gagner.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées parmi les six boules.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres. La variable  $X$  comptabilise le nombre de succès (obtenir une boule rouge) durant la répétition de six épreuves de Bernoulli, identiques et indépendances. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 6$  et  $p = \frac{4}{16+4} = \frac{1}{5}$ .
2. Calculer  $P(X = 1)$ .

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{6}{1} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{6-1} \\ &= 6 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^5 \\ &\approx 39\% \end{aligned}$$

On admet que  $P(X = 0) = 26,2\%$ .

3. Calculer  $P(X \geq 2)$ . En déduire la probabilité de gagner une partie. Les événements  $X \geq 2$  et  $X < 2$  (ce dernier étant équivalent à  $X = 0$  ou  $X = 1$ ) sont complémentaires, donc :

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\&= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\&\approx 1 - 0,262 - 0,39 \\&\approx 0,34\end{aligned}$$

La probabilité de gagner est donc 34%.

**Exercice 3** (Géométrie — 8 points). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(14; 3)$  et de vecteur normal  $\vec{u}(4; -3)$  ;
- le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I(7; 2)$  et de rayon 5.

1. Montrer qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$  est  $-4x + 3y + 47 = 0$ . Soit  $M(x, y)$  un point de  $\mathcal{D}$ . Alors les vecteurs  $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-14 \\ y-3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux, et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} &= 0 \\(x - 14) \times 4 + (y - 2) \times (-3) &= 0 \\4x - 3y - 52 + 6 &= 0 \\4x - 3y - 47 &= 0 \\-4y + 3y + 47 &= 0\end{aligned}$$

2. Montrer qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est  $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 25$ . L'équation cartésienne d'un cercle de centre de coordonnées  $I(x_I, y_I)$  et de rayon  $r$  est  $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$ . Appliqué aux données du problème, cela donne le résultat attendu.

3. On considère le point  $H(11; -1)$ .

- (a) Montrer que  $H$  appartient à  $\mathcal{D}$  et à  $\mathcal{C}$ . Vérifions que les coordonnées de  $H$  vérifient les équations de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned}-4 \times 11 + 3 \times (-1) + 47 &= -44 - 3 + 47 \\&= 0\end{aligned}$$

Donc  $H \in \mathcal{D}$ .

$$\begin{aligned}(11 - 7)^2 + (-1 - 2)^2 &= 4^2 + (-3)^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25\end{aligned}$$

Donc  $H \in \mathcal{C}$ .

- (b) *Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{IH}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont orthogonaux.* Calculons le produit scalaire  $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AH}$ , après avoir calculé les coordonnées des deux vecteurs :  $\overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AH} &= 4 \times -3 + -3 \times -4 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux.

4. *Quelle est la position relative de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  ? Justifier.* Puisque  $\overrightarrow{IH}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont orthogonaux, alors les droites  $(IH)$  et  $(AH)$  sont perpendiculaires. Or  $[IH]$  est un rayon. La droite  $(AH)$  est donc une droite perpendiculaire à un rayon passant par l'extrémité de ce rayon : c'est une tangente.

#### Exercice 4 (Trigonométrie — 4 points).

1. *Donner la formule permettant de calculer  $\cos a + b$ .* Formule du cours :

$$\cos a + b = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

2. *Exprimer  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$  sous la forme d'une fraction irréductible.*

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} + \frac{1}{4} &= \frac{8}{12} + \frac{3}{12} \\ &= \frac{11}{12}\end{aligned}$$

3. *En déduire une valeur exacte de  $\cos \frac{11\pi}{12}$ .* En utilisant les deux résultats

précédents, cela donne :

$$\begin{aligned}\cos \frac{11\pi}{12} &= \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$