

Exercice 1 (Termes d'une suite — 4 points). Soient :

- u la suite de premier terme $u_2 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$;
- v la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{1}{n+1}$.

1. Calculer u_4 . $u_3 = u_{2+1} = 3u_2 + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10$, donc $u_4 = u_{3+1} = 3u_3 + 1 = 3 \times 10 + 1 = 31$.
2. Quelle est la valeur du troisième terme de la suite u ? Le premier terme est u_2 , le deuxième est u_3 , et le troisième u_4 , qui a déjà été calculé, donc le troisième terme de la suite est $u_4 = 31$.
3. Calculer le terme de v de rang 4. $v_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$
4. Donner les quatre premiers termes d'une suite ni croissante ni décroissante. Par exemple : 1 ; -1 ; 1 ; -1.

Exercice 2 (Variations — 5 points). Soit u la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 18 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{n+1} \end{cases}$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ si et seulement si $n \geq 4$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{7u_n}{n+1}}{u_n} \\ &= \frac{7u_n}{n+1} \times \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{7}{n+1} \end{aligned}$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ si et seulement si $\frac{7}{n+1} \leq 1$, c'est-à-dire si $n \geq 6$.

2. En déduire que u est décroissante à partir d'un certain rang que l'on précisera. Puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ est équivalent à « u est décroissante », alors u est décroissante à partir de $n = 6$.

Exercice 3 (Suite et Dérivées — 11 points). L'objet de l'exercice est d'étudier les variations de la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n^2+3}{4(n+1)}$.

On considère f , la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f : x \mapsto \frac{x^2+3}{4(x+1)}$.

1. Étude de f

- (a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{4(x+1)^2}$. On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$, avec $u = x^2 + 3$, $v = 4(x + 1)$, et donc $u' = 2x$ et $v' = 4$. Cela donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x4(x+1) - 4(x^2+3)}{(4(x+1))^2} \\ &= \frac{8x^2 + 8x - 4x^2 - 12}{4 \times 4(x+1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 8x - 12}{4 \times 4(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{4(x+1)^2} \end{aligned}$$

- (b) Montrer que $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$. Résolvons $f'(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{4(x+1)^2} &\geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 &\geq 0 \text{ car le dénominateur est positif} \end{aligned}$$

C'est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ positif, donc à deux racines, qui sont : $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$.

La dérivée f' est donc positive si x est à l'extérieur des racines. Mais puisque le domaine de définition est réduit à $[0; +\infty[$, cela est équivalent à $x \geq 1$.

- (c) En déduire les variations de f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
f			

2. En déduire les variations de u sur \mathbb{N} . Puisque $u_n = f(n)$, les variations de u sont les mêmes que celles de f , donc u est décroissante sur $[0; 1]$, et croissante sur $[1; +\infty[$.

3. Extremums

- (a) La fonction f a-t-elle des extremums ? Si oui, lesquels ? La dérivée s'annule en changeant de signe en 1, donc f a un extremum en 1. Vu le tableau de variations, c'est un minimum, et $f(1) = \frac{1}{2}$.
- (b) Quelle est la plus petite valeur atteinte par u ? Puisque u est décroissante jusqu'à 1, et croissante ensuite, $u_1 = \frac{1}{2}$ est le minimum de u .