17/04/2015
DS n° 8

Suites Dérivation
Sujet A

1^e S3

Exercice 1 (Termes d'une suite — 4 points)**.** Soient :

- u la suite de premier terme $u_2 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$;
- v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + 1$.

1. Calculer u_3.
2. Quelle est la valeur du quatrième terme de la suite u ?
3. Calculer le terme de v de rang 4.
4. Donner les six premiers termes d'une suite ni croissante ni décroissante.

Exercice 2 (Suite et Dérivées — 11 points)**.** L'objet de l'exercice est d'étudier les variations de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2+3}{4(n+1)}$.

On considère f, la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto \frac{x^2+3}{4(x+1)}$.

1. *Étude de f*
   (a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{4(x+1)^2}$.
   (b) Montrer que $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1$.
   (c) En déduire les variations de f.
2. En déduire les variations de u sur $\mathbb{N}$.
3. *Etremums*
   (a) La fonction f a-t-elle des extremums ? Si oui, lesquels ?
   (b) Quelle est la plus petite valeur atteinte par u ?

Exercice 3 (Variations — 5 points)**.** Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 27 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{n+1} \end{cases}$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ si et seulement si $n \geqslant 4$.
2. En déduire que u est décroissante à partir d'un certain rang que l'on précisera.