23/03/2015
DS n^o 7

Variables aléatoires
Dérivation Corrigé

1^eS3

Exercice 1 (Variation de fonctions — 7 points)**.** *On souhaite déterminer les variations de la fonction :*

$$f : x \mapsto \frac{3}{\sqrt{2x^3 - 15x^2 + 36x - 18}} + 7$$

définie sur $[1; +\infty[$.

1. *On considère tout d'abord la fonction g, définie sur le même intervalle que f par $g : x \mapsto 2x^3 - 15x^2 + 36x - 18$.*

   (a) *Dériver g.* La fonction g étant un polynôme, sa dérivée est la somme des dérivées de ses monômes. Donc :

   $$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \times 3x^2 - 15 \times 2x^1 + 36 \times 1x^0 - 0 \\ &= 6x^2 - 30x + 36 \end{aligned}$$

   (b) *Montrer que $g(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [2; 3]$.* La fonction g' étant un polynôme du second degré, nous calculons son discriminant : $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 6 \times 36 = 36 = 6^2$. Puisque $\Delta > 0$, et que $6 \geqslant 0$, la fonction est négative entre les racines, et positive à l'extérieur. Les racines sont $x_1 = \frac{30-\sqrt{36}}{2\times 6} = 2$ et $x_2 = \frac{30+\sqrt{36}}{2\times 6} = 3$, ce qui correspond à ce qu'il fallait démontrer.

   (c) *En déduire les variations de g.*

x	1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. *En remarquant le lien entre f et g, en déduire les variations de f.* Puisque f correspond à $\frac{3}{\sqrt{g}} + 7$, nous avons :

x	1		2		3		$+\infty$
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$\sqrt{g}$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$\frac{3}{\sqrt{g}}$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
$f = \frac{3}{\sqrt{g}} + 7$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 2 (Jeu — 7 points)**.** *Un opérateur de téléphonie mobile souhaite réaliser une enquête auprès de ses abonnés. Pour les inciter à répondre, il propose aux participants un tirage au sort, dans lequel ils peuvent gagner 30 minutes de communication une fois sur six, 20 minutes une fois sur trois et 10 minutes sinon.*

On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de minutes gagnées.

1. (a) *Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.* La loi de probabilité de X est la suivante.

x_i	10	20	30
$P(X = x_i)$	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_6$

La probabilité de gagner 10 minutes a été calculée de telle manière que la somme de toutes les probabilités fasse 1.

L'espérance est donc :

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{3} + 30 \times \frac{1}{6} = \frac{100}{60} = \frac{5}{3}$$

La variance, quant à elle, est :

$$\begin{aligned} V(X) &= 10^2 \times \frac{1}{2} + 20^2 \times \frac{1}{3} + 30^2 \times \frac{1}{6} - E(X)^2 \\ &= \frac{2000}{60} - \frac{25}{9} \\ &= \frac{275}{9} \end{aligned}$$

Ainsi, l'écart-type est $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{275}{9}} = \frac{\sqrt{275}}{3} \approx 5,5$.

(b) *Que représente cette espérance ?* Cette espérance est le temps moyen gagné par un joueur.

2. *Pour motiver plus particulièrement les adolescents, l'opérateur remplace dans le tirage au sort chaque minute de communication par 5 SMS. On appelle Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de SMS gagnés.*

   (a) *Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de X.* On a $Y = 5X$.

   (b) *En déduire l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y.* On pourrait calculer la loi de probabilité de Y, et refaire tous les calculs. On peut aussi utiliser :

$$E(Y) = E(5X) = 5E(X) = \frac{25}{3}$$
$$\sigma(Y) = \sigma(5X) = |5|\,\sigma(X) = \frac{5\sqrt{275}}{3}$$

Exercice 3 (Algorithmique — 7 points)**.** *L'objet de l'exercice est d'écrire un algorithme qui, étant donné quatre nombres a, b, c, et d (où $c \neq 0$) donne les variations de la fonction homographique $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, définie sur $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$.*

1. *Montrer que pour tout x du domaine de définition :*

$$f'(x) = \frac{ad - cb}{(cx+d)^2}$$

Remarquons tout d'abord que la dérivée de $x \mapsto ax+b$ est a, et celle de $x \mapsto cx+d$ est c. Nous appliquons ensuite la formule $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-v'u}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{acx+da-cax+bc}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{da-bc}{(cx+d)^2} \end{aligned}$$

2. *En déduire que f est croissante si et seulement si :*

$$ad-cb \geqslant 0$$

Puisque $(cx+d)^2$ est supérieur à zéro, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $da-bc > 0$.

3. *Compléter l'algorithme suivant, afin qu'il affiche si la fonction est croissante ou décroissante.*

Lire a
Lire b
Lire c
Lire d
Si $ad-cb \geqslant 0$
Alors
  Afficher "La fonction f est croissante."
Sinon
  Afficher "La fonction f est decroissante."
FinSi

---

4. *Modifier cet algorithme pour qu'il affiche si la fonction f est strictement croissante, strictement décroissante, ou constante.*

Il faut distinguer le cas particulier où la dérivée est nulle (c'est-à-dire que la fonction est constante). Le bloc **Si** devient alors :

```
Si  ad − cb = 0
Alors
  Afficher "La fonction f est constante"
Sinon
  Si  ad − cd > 0
  Alors
    Afficher "La fonction f est croissante."
  Sinon
    Afficher "La fonction f est decroissante."
  FinSi
FinSi
```