

13/02/15
DS n° 6 bis

TRIGONOMÉTRIE
SUJET A

1^eS3

Exercice 1 (Valeur (presque) remarquable). *On donne :*

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

1. *Rappeler le lien entre $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $\cos t$.*

On a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$.

2. *En déduire la valeur de $\sin \frac{3\pi}{8}$. On prenant $t = \frac{\pi}{8}$, on a :*

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) &= \cos \frac{\pi}{8} \\ \sin \frac{3\pi}{8} &= \cos \frac{\pi}{8} \\ \sin \frac{3\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Équation trigonométrique).

1. *Montrer que les solutions de $\sin x = \sin 2x$ sont $x = -2k\pi$ et $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$ (pour $k \in \mathbb{Z}$). On a :*

$$x = 2x + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - 2x + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Réolvons la première équation :

$$\begin{aligned}x &= 2x + 2k\pi \\x - 2x &= 2k\pi \\-x &= 2k\pi \\x &= -2k\pi\end{aligned}$$

Quant à la deuxième :

$$\begin{aligned}x &= \pi - 2x + 2k\pi \\x + 2x &= \pi + 2k\pi \\3x &= \pi + 2k\pi \\x &= \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\end{aligned}$$

2. *En déduire les solutions de cette même équation comprises dans l'intervalle $[0; \pi]$.*

Premières solutions : $x = -2k\pi$

$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq \pi \\0 &\leq -2k\pi \leq \pi \\0 &\geq k \geq -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Le seul entier vérifiant cette condition est $k = 0$, qui correspond à $x = 0$.

Secondes solutions : $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$

$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq \pi \\0 &\leq \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \leq \pi \\-\frac{\pi}{3} &\leq \frac{2}{3}k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{3} \\-\frac{\pi}{3} &\leq \frac{2}{3}k\pi \leq \frac{2\pi}{3} \\-\frac{1}{2} &\leq k \leq 1\end{aligned}$$

Les entiers correspondant à cette condition sont $k \in \{0; 1\}$, ce qui donne $x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \pi\right\}$.

Bilan Les solutions sont donc $x \in \left\{0; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}$.

Exercice 3 (Équation trigonométrique).

1. Résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$. Puisque $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, alors résoudre cette équation revient à résoudre $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$. Les solutions sont donc, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

2. Résoudre l'équation $2\left(u - \frac{1}{2}\right)(u - 4) = 0$. C'est une équation produit, donc $u = \frac{1}{2}$ ou $u = 4$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

$$2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) (\cos x - 4) = 0$$

En appliquant le raisonnement de la question précédente, cette équation est équivalente à :

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = 4$$

La première alternative a été résolue à la première question. La seconde n'a pas de solutions, puisqu'un cosinus est inférieur à 1. L'ensemble des solutions est donc :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Exercice 4 (Bonus). *Résoudre :*

$$\cos x + \sin 3x = 4$$

La valeur maximale que peuvent prendre un cosinus et un sinus est 1. Donc la valeur maximale que peut prendre $\cos x + \sin 3x$ est 2. Donc l'équation n'a pas de solutions.