13/02/15 **TRIGONOMÉTRIE** *1^{e}S3*

DS n^o 6 bis **SUJET A**

Exercice 1 (Valeur (presque) remarquable)**.** *On donne :*

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

1. *Rappeler le lien entre* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ *et* $\sin t$.
   On a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$.
2. *En déduire la valeur de* $\cos\frac{3\pi}{8}$. On prenant $t = \frac{\pi}{8}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) &= \sin\frac{\pi}{8}\\ \cos\frac{3\pi}{8} &= \sin\frac{\pi}{8}\\ \cos\frac{3\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Équation trigonométrique)**.**

1. *Résoudre l'équation* $\cos x = \frac{1}{2}$. Puisque $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, alors résoudre cette équation revient à résoudre $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$. Les solutions sont donc, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

2. *Résoudre l'équation* $2\left(u-\frac{1}{2}\right)(u-3)=0$. C'est une équation produit, donc $u=\frac{1}{2}$ ou $u=3$.
3. *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :*

$$2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)(\cos x-3)=0$$

En appliquant le raisonnement de la question précédente, cette équation est équivalente à :

$$\cos x=\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x=3$$

La première alternative a été résolue à la première question. La seconde n'a pas de solutions, puisqu'un cosinus est inférieur à 1. L'ensemble des solutions est donc :

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

Exercice 3 (Équation trigonométrique)**.**

1. *Montrer que les solutions de* $\sin x=\sin 2x$ *sont* $x=-2k\pi$ *et* $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi$ *(pour* $k\in\mathbb{Z}$*).* On a :

$$x=2x+2k\pi \text{ ou } x=\pi-2x+2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$

Résolvons la première équation :

$$\begin{aligned} x &= 2x+2k\pi \\ x-2x &= 2k\pi \\ -x &= 2k\pi \\ x &= -2k\pi \end{aligned}$$

Quant à la deuxième :

$$\begin{aligned} x &= \pi - 2x + 2k\pi \\ x + 2x &= \pi + 2k\pi \\ 3x &= \pi + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \end{aligned}$$

2. *En déduire les solutions de cette même équation comprises dans l'intervalle* $[0;\pi]$.

Premières solutions : $x = -2k\pi$

$$\begin{aligned} &0 \leqslant x \leqslant \pi \\ &0 \leqslant -2k\pi \leqslant \pi \\ &0 \geqslant k \geqslant -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Le seul entier vérifiant cette condition est $k = 0$, qui correspond à $x = 0$.

Secondes solutions : $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant x \leqslant \pi \\
0 &\leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \leqslant \pi \\
-\frac{\pi}{3} &\leqslant \frac{2}{3}k\pi \leqslant \pi - \frac{\pi}{3} \\
-\frac{\pi}{3} &\leqslant \frac{2}{3}k\pi \leqslant \frac{2\pi}{3} \\
-\frac{1}{2} &\leqslant k \leqslant 1
\end{aligned}$$

Les entiers correrspondant à cette condition sont $k \in \{0; 1\}$, ce qui donne $x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \pi\right\}$.

Bilan Les solutions sont donc $x \in \left\{0; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}$.

Exercice 4 (Bonus)**.** *Résoudre :*

$$\cos x + \sin 2x = 3$$

La valeur maximale que peuvent prendre un cosinus et un sinus est 1. Donc la valeur maximale que peut prendre $\cos x + \sin 2x$ est 2. Donc l'équation n'a pas de solutions.