15/01/15 *DS nº 5*	PRODUIT SCALAIRE STATISTIQUES	*1^e S3*

Exercice 1 (Dérivées — 4 points)**.** *Calculer la dérivée des fonctions suivantes.*

1. $f : x \mapsto 3x^2 - 2\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times 2x - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 6x - \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. $g : x \mapsto (2x-1)(1-x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(1-x) + (-1)(2x-1) \\ &= 2 - 2x - 2x + 1 \\ &= -4x + 3 \end{aligned}$$

   Il était aussi possible de commencer par développer g, puis de dériver la forme développée, qui est un polynôme. Le résultat doit être le même.

Exercice 2 (Temps d'attente — 4 points)**.** *Une gérante veut mettre en place les files d'attente dans son nouveau magasin. Elle hésite entre deux méthodes :*

1. *il y a une file d'attente pour chaque caisse (comme dans les supermarchés) ;*
2. *il y a une seule file d'attente pour toutes les caisses, et les clients sont répartis au dernier moment vers une caisse libre (comme dans les gares SNCF).*

Pour choisir, elle simule une fois pour chacune des deux méthodes, l'arrivée de 1000 clients, dans les mêmes conditions.

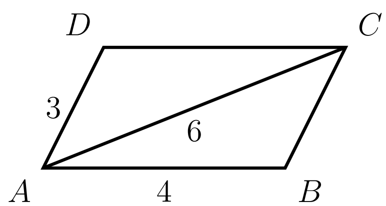
Elle observe les temps d'attente suivants pour la file type « supermarché » :

Temps d'attente	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Effectif	*32*	*101*	*150*	*145*	*98*	*122*	*123*	*101*	*60*	*68*

Pour la file de type « SNCF », elle obtient un temps d'attente moyen de 5,4 minutes, et un écart-type de 1,9 minutes.

1. *Calculer la moyenne et l'écart-type des temps d'attente de la file type « supermarché ».* À la calculatrice, on trouve $\bar{x} = 5,375$ et $\sigma \approx 2,49$.
2. *Quelle type de file choisiriez-vous ? Justifier.* La moyenne est sensiblement la même (ou alors est exactement la même si 5,4 minutes est en fait un arrondi de 5,375). À temps d'attente moyen égal, il est préférable d'avoir un écart-type petit. Un grand écart type signifie qu'il y a de grandes disparités : certaines files vont avancer très vite, et d'autres très lentement. Cela va engendrer un sentiment de frustration. Avec une file unique, en revanche (et un écart-type petit), tout le monde attend (à peu de choses près) aussi longtemps.

Exercice 3 (Parallélogramme — 6 points)**.** *On considère le parallélogramme suivant.*



1. *Montrer que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 5,5$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - AB^2 - AD^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - AB^2 - AD^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(6^2 - 4^2 - 3^2\right) \\
&= 5,5
\end{aligned}$$

2. *En utilisant une autre expression du produit scalaire* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, *en déduire la mesure de l'angle* $\widehat{BAD}$ *(arrondi à 0,1° ou 0,01 radians près).* Nous utilisons la formule du cosinus :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= AB.AD.\cos\widehat{BAD} \\
&= 4 \times 3 \times \cos\widehat{BAD} \\
&= 12\cos\widehat{BAD}
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent, cela donne $5,5 = 12\cos\widehat{BAD}$, soit $\cos\widehat{BAD} = \frac{5,5}{12}$. Une mesure de l'angle $\widehat{BAD}$ est donc 62,7° ou 1,09 rad.

3. (a) *Développer* $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2$. C'est une identité remarquable : $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + AD^2$.

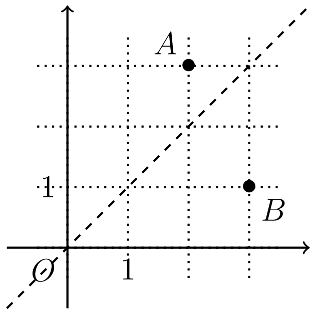
   (b) *En déduire la valeur exacte de la longueur BD.* Nous remarquons que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$, et que

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}$.

$$\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + AD^2$$
$$BD^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + AD^2$$
$$BD^2 = 4^2 - 2 \times 5,5 + 3^2$$
$$BD^2 = 14$$
$$BD = \sqrt{14}$$

Exercice 4 (Lieu géométrique — 6 points)**.**

Dans la figure ci-contre, on place un point M sur la droite d'équation $y = x$; ses coordonnées sont donc (x, x) (où x est un réel). Le but de l'exercice est de déterminer les positions possibles de M telles que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires.



1. *Montrer que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = (x-3)(2x-3)$.* Les coordonnées de A, B et M sont respectivement $A(2;3)$, $B(3;1)$ et $M(x;x)$. Donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont $\overrightarrow{AB}(x-2;x-3)$ et $\overrightarrow{BM}(x-3;x-1)$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} &= (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) \\ &= (x-3)((x-2)+(x-1)) \\ &= (x-3)(2x-3)\end{aligned}$$

2. *Résoudre $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.* Puisque $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = (x-3)(2x-3)$, c'est une équation produit, dont les solutions sont $x = 3$ et $x = \frac{3}{2}$.

3. *Répondre au problème posé : Quelles sont les positions possibles de M ?* Les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs correspondants sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si leur produit scalaire est nul. Donc $x = 3$ ou $x = \frac{3}{2}$, et donc les coordonnées possible de M sont $(3; 3)$ et $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.