CORRIGÉ

Exercice 1 (Calcul de fonctions dérivées — 4 points)**.** *Calculer les dérivées des fonctions suivantes.*

$f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$ C'est un produit des deux fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Or $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x\sqrt{x} + \frac{x \times \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{5}{2}x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$g : x \mapsto \frac{2x^2-1}{x-2}$ C'est un quotient des deux fonctions $u : x \mapsto 2x^2 - 1$ et $v : x \mapsto x - 2$, avec $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)(x) \\ &= \frac{4x \times (x-2) - 1 \times (2x^2 - 1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 2x^2 + 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x + 1}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 (Tangente — 4 points)**.**

1. *Cours : Étant donné une fonction f et un réel a, donner l'équation de la tangente à f en a.*

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

2. *Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(3) = 4$, telle que la dérivée de f en 3 est 2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 3.* On applique la formule précédente. La droite est une tangente en 3, donc $a = 3$. La dérivée de f en 3 est 2, donc $f'(a) = 2$, et $f(3) = 4$ donc $f(a) = 4$. Cela donne :

$$\begin{aligned} y &= 2\,(x-3) + 4 \\ y &= 2x - 6 + 4 \\ y &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Exercice 3 (Statistiques — 6 points)**.** *Dans cette question, les extrémités des diagrammes en boîte représentent les valeurs extrêmes.*

On a réalisé une enquête sur le temps, en secondes, que doit attendre un abonné qui contacte, par téléphone, un fournisseur d'accès à internet A. Cette enquête a concerné 200 abonnés et donné les résultats suivants.

Temps d'attente (s)	5	10	20	30	40	50
Nombre d'abonnés	20	24	32	24	58	42
Effectifs cumulés croissants	20	44	76	100	158	200

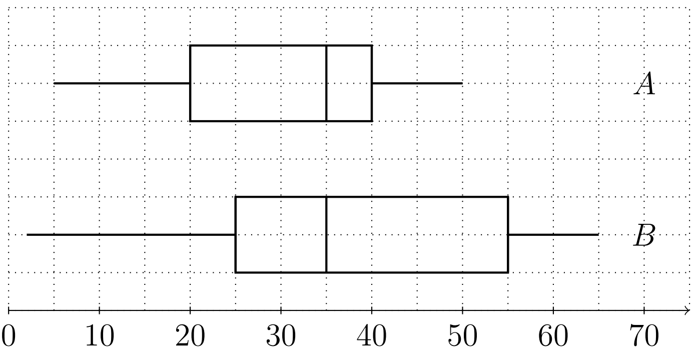
1. *Calculer la médiane et les quartiles de cette série.* On calcule les effectifs cumulés croissants (voir tableau ci-dessus).

   Médiane Il y a 200 valeurs, donc la médiane est la moyenne des 100^{e} et 101^{e} valeurs. La 100^{e} valeur est 30, et la 101^{e} est 40, donc la médiane est $\frac{30+40}{2} = 35$.

   Premier quartile Le premier quartile est la plus petite valeur telle que 25 % des valeurs (soit 50 valeurs) lui soient inférieures. C'est donc 20.

   Troisième quartile Idem avec 75 % (donc 150 valeurs) : le troisième quartile est donc 40.

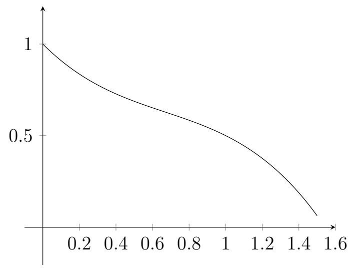
2. *Un autre fournisseur d'accès, B, a réalisé la même enquête auprès de 200 de ses abonnés, et a représenté la série obtenue par le diagramme en boîte ci-dessous. Représenter par un diagramme en boîte la série obtenue pour le fournisseur A sur le même repère.*



3. *Comparer les deux séries, et les plates-formes téléphoniques des deux opérateurs.* Bien que les deux médianes soient les mêmes, les quartiles de la série A sont inférieurs à ceux de la série B. Donc dans l'ensemble, le temps d'attente des abonnés du fournisseur A est inférieur à celui du fournisseur B.

Exercice 4 (Tobogan — 6 points)**.**

Ingénieur dans une entreprise de fabrication d'attractions, un parc aquatique vous commande un tobogan. La forme souhaitée est la courbe représentée ci-contre (où x est l'abscisse, et $f(x)$ l'altitude, toutes les deux en décamètres), dont l'équation est :



$$f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x + 1$$

Le tobogan est considéré comme dangereux s'il n'est pas trop pentu, c'est-à-dire si à aucun endroit la pente est inférieure à -2.

Le but de l'exercice est d'étudier le tobogan pour savoir s'il est dangereux ou non.

1. *Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$.* La dérivée d'une somme (ou d'une différence) de fonctions est la somme (ou la différence) des dérivées des fonctions. Donc il suffit de dériver

chaque membre du monome :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \times 3x^{3-1} + 2x^{2-1} - 1x^{1-0} \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

2. *Résoudre l'inéquation $f'(x) < -2$.*

$$\begin{aligned} f'(x) &< -2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 &< -2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 &< 0 \end{aligned}$$

   Il faut étudier le signe du polynôme. A-t-il des racines ?

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \times -\frac{3}{2} \times 1 \\ &= 4 + 6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

   Donc Δ est strictement positif : le polynôme a deux racines. Il est donc positif entre les racines, et négatif à l'extérieur. Les deux racines sont $x_1 = \frac{-2-\sqrt{10}}{2\times-\frac{3}{2}}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{10}}{2\times-\frac{3}{2}}$, soit $x_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$ et $x_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
$-\frac{3}{2}^2 + 2x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc $f'(x) < -2$ si $x < \frac{2-\sqrt{10}}{3}$ ou $x > \frac{2+\sqrt{10}}{3}$.

3. *Le tobogan est-il dangereux ?* A première vue, l'équation $f'(x) < -2$ a des solutions, donc le tobogan est dangereux. Mais il faut prendre en compte le domaine de définition de f. Nous avons montré que $f'(x) \geqslant 2$ si $\frac{2-\sqrt{10}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2+\sqrt{10}}{3}$. Mais $\frac{2-\sqrt{10}}{3} \approx -0,4$ et $\frac{2+\sqrt{10}}{3} \approx 1,7$. Or f est définie sur $[0; 1,5]$, donc f est supérieure à -2 sur son domaine de définition : le tobogan n'est pas dangereux.