21/11/14
DS n° 3

Vecteurs Droites
Fonctions
Corrigé

1eS3

Exercice 1 (Position relative (de fonctions) — 4 points)**.**

1. *Déterminer le signe du polynôme* $3x^2+5x-2$*.* C'est un trinôme du second degré. Calculons le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 = 7^2$. Le discriminant étant positif, il y a deux racines $x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times 3} = -2$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\times 3} = \frac{1}{3}$. Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. *En déduire la position relative des courbes des fonctions définies sur* $\mathbb{R}^*$ *par :*

$$f : x \mapsto 4x^2 + \frac{1}{x} \text{ et } g : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x} - 5x + 2$$

Pour étudier la position relative de deux courbes, il faut étudier $f(x) \leqslant g(x)$.

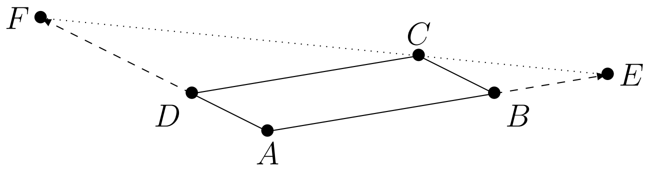
$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant g(x) \\ 4x^2 + \frac{1}{x} &\leqslant x^2 + \frac{1}{x} - 5x + 2 \\ 4x^2 - x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + 4x - 1 &\leqslant 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

On reconnait le polinôme étudié dans la question précédente. Donc $f(x) \leqslant g(x)$ si et seulement si le polynôme en question est négatif, c'est à dire si $x \in [-2;0[\cup \left]0;\frac{1}{3}\right]$ (en ayant exclu 0 car ni f ni g ne sont définies en 0).

Conclusion : la courbe de f est au dessus de celle de g si $x \in]-\infty;-2] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$.

Exercice 2 (Géométrie — 7 points)**.** *Soit $ABCD$ un parallélogramme. On place les points E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, et F tel que $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AD}$.*

1. *Faire une figure.*



2. *Montrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \overrightarrow{AD}$.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}\\ &= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

3. *Exprimer $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}\\ &= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD}\\ &= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

4. *Que peut-on dire des points E, C et F ?*

   Voici deux méthodes possibles pour répondre à cette question.

   Première méthode On observe que $\overrightarrow{CF} = -2\overrightarrow{CE}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires, donc C, E et F sont alignés.

   Seconde méthode Nous avons montré que les coordonnées de $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CE}$ dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ sont $\overrightarrow{CF}\,(-1; 2)$ et $\overrightarrow{CE}\left(\frac{1}{2}; -1\right)$. Vérifions la condition de colinéarité : $-1 \times -1 - \frac{1}{2} \times 2 = 1 - 1 = 0$. Donc les vecteurs sont colinéaires, et les points E, C et F sont alignés.

Exercice 3 (Position relative (de droites) — 9 points)**.** *Le but de l'exercice est d'écrire un algorithme indiquant le nombre de points d'intersection entre deux droites.*

1. Cas particulier *Soient deux droites définies par leur équation cartésienne $d_1 : 2x + y - 1 = 0$ et $d_2 : x - y + 2 = 0$.*
   (a) *Déterminer un vecteur directeur de d_1, et un vecteur directeur de d_2.* Pour une droite d'équation cartésienne $ax+by+c = 0$, le vecteur $(-b; a)$ est un vecteur directeur.

   Donc les vecteurs de coordonnées $\overrightarrow{u_1}\,(-1; 2)$ et $\overrightarrow{u_2}\,(1; 1)$ sont des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.

   (b) *Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?* Vérifions la condition de colinéarité : $-1 \times 1 - 2 \times 1 = -3$. Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

   (c) *En déduire le nombre de points d'intersection entre ces deux droites.* Les vecteurs directeurs des deux droites ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles, et elles ont un unique point d'intersection.

2. Cas général *Soient deux droites $d_1 : ax + by + c = 0$ et $d_2 : a'x + b'y + c' = 0$.*
   (a) *Donner l'expression d'un vecteur directeur pour chacune des droites, et donner la condition pour que ces vecteurs soient colinéaires.* En utilisant les mêmes arguments que dans les questions précédentes, on obtient que les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(-b; a)$ et $\overrightarrow{u'}\,(-b'; a')$ sont des vecteurs directeurs de d_1 et d_2. Ils sont colinéaires si $-ba' + b'a = 0$.

   (b) *Compléter l'algorithme suivant.* Les droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, donc dans l'algorithme, la condition à ajouter est : `-ba'+b'a = 0`.

   (c) *Modifier l'algorithme pour qu'au lieu d'afficher que les droites sont parallèles, il affiche l'une des deux phrases* Les droites n'ont aucun point commun *ou* Les droites ont une infinité de points d'intersection.

   C'est une question plus technique qu'il n'y paraît. Dans le cas où les droites sont parallèles, nous distinguons deux cas :

— Les droites sont parallèles à l'axe des ordonnées (« verticales »). Cela correspond au cas où $b = b' = 0$ (pour le prouver, passer par l'équation réduite), et elles sont confondues si et seulement si $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ (ces nombres sont bien définis car $a \neq 0$ et $a' \neq 0$).

— Les droites ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées : leur équation réduite est donc de la forme $y = mx + p$. Nous savons déjà que leurs coefficients directeurs sont égaux (puisqu'elles sont parallèles). Elles sont donc confondues si et seulement si leur ordonnée à l'origine est égale, c'est-à-dire si $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$.

On peut donc remplacer la ligne `Afficher "Les droites sont parallèles"` par les lignes suivantes :

```
Si b = 0
Alors
  Si c/a = c'/a'
  Alors
    Afficher "Une infinite de
              points d'intersection."
  Sinon
    Afficher "Aucun point
              d'intersection."
  FinSi
Sinon
  Si c/b = c'/b'
  Alors
    Afficher "Une infinite de
              points d'intersection."
  Sinon
    Afficher "Aucun point
              d'intersection."
  FinSi
FinSi
```

Question : Pourquoi est-il suffisant de tester seulement $b = 0$ (et non pas $b = 0$ et $b' = 0$) ?