13/10/14
DS n^o 2

Trinômes — Fonctions
Corrigé

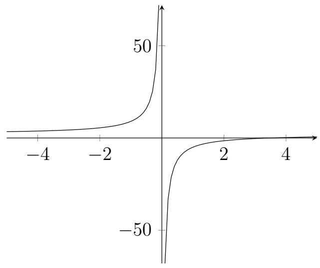
1^{e}S3

Exercice 1 (Restitution organisée des connaissances — 4 points)**.** Voir le cours.

Exercice 2 (Variation de fonctions — 4 points)**.**
Déterminer les variations des fonctions suivantes. Cela n'était pas demandé, mais on représente ici les courbes de chaque fonction à côté, pour visualiser les variations.

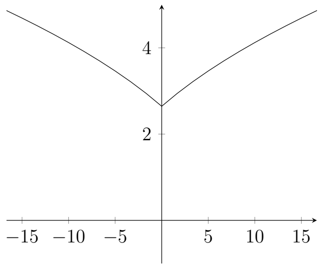
(a) $f : x \mapsto -\frac{7}{x} + 2$, *définie sur* $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘
$-\frac{7}{x}$	↗	‖	↗
$-\frac{7}{x} + 2$	↗	‖	↗



(b) $g : x \mapsto \sqrt{|x| + 7}$, *définie sur* $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	↘		↗
$\lvert x\rvert + 7$	↘		↗
$\sqrt{\lvert x\rvert + 7}$	↘		↗



Exercice 3 (Valeur absolue — 4 points)**.**
Résoudre les équations suivantes.

(a) $|2x - 2| = x + 1$ D'après la définition de la valeur absolue, il y a deux alternatives.

$$\begin{array}{rlrl|rlrl}
2x-2 & \leqslant 0 \text{ et } & -(2x-2) & = x+1 & 2x-2 & \geqslant 0 \text{ et } & 2x-2 & = x+1 \\
2x & \leqslant 2 \text{ et } & -2x+2x & = x+1 & 2x & \geqslant 2 \text{ et } & x & = 3 \\
x & \leqslant 1 \text{ et } & 1 & = 3x & x & \geqslant 1 \text{ et } & x & = 3 \\
x & \leqslant 1 \text{ et } & \frac{1}{3} & = x & & & &
\end{array}$$

Les deux solutions sont cohérentes, donc l'équation a deux solutions $x = 3$ et $x = \frac{1}{3}$.

(b) $|x - 1| = |x + 6|$ Ici encore, deux alternatives :

$$\begin{array}{rl|rl}
-(x-1) & = x+6 & x-1 & = x+6 \\
-x+1 & = x+6 & -1 & = 6 \\
-5 & = 2x & & \\
-\frac{5}{2} & = x & \text{Impossible} &
\end{array}$$

Cette équation a donc une unique solution $x = -\frac{5}{2}$.

Exercice 4 (Fonction rationnelle — 8 points)**.** *Le but de l'exercice est de déterminer les variations de la fonction* $f : x \mapsto \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2}$.

(a) *Déterminer le domaine de définition de la fonction* f. Cette fonction est définie si son dénominateur est non nul, c'est-à-dire si $x^2 - 2x + 2$ est différent de 0. C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4$. Donc le trinôme n'a pas de racines, et la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) *Déterminer les deux nombres réels* a *et* b *tels que pour tout nombre réel* x*, on ait :*

$$f(x) = a + \frac{b}{1 + (x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{1+(x-1)^2} &= a + \frac{b}{1 + x^2 - 2x + 1} \\ &= a + \frac{b}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{a\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^2 - 2x + 1} + \frac{b}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{ax^2 - 2ax + 2a + b}{x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

Nous obtenons une fraction dont le dénominateur est le même que celui de $f(x)$. Pour avoir une égalité avec f, il faut que les numérateurs soient égaux, c'est-à-dire que $a = 1$, $-2a = -2$, et $2a + b = 1$. Cela donne : $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 2} = 1 - \frac{1}{1 + (x-1)^2}$$

(c) *Déterminer successivement les variations sur* $\mathbb{R}$ *des fonctions* $x \mapsto 1 + (x-1)^2$, $x \mapsto \frac{1}{1+(x-1)^2}$*, et* f. La première fonction est un trinôme du second degré, sous forme canonique : elle est décroissante jusqu'à une abscisse -1, et croissante ensuite.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$1 + (x-1)^2$	$\searrow$		$\nearrow$
$\frac{1}{1+(x-1)^2}$	$\nearrow$		$\searrow$
$-\frac{1}{1+(x-1)^2}$	$\searrow$		$\nearrow$
$f(x) = 1 - \frac{1}{1+(x-1)^2}$	$\searrow$		$\nearrow$

(d) *Calculer* $f(2)$*, et en déduire les solutions de* $f(x) = 0$ *sur* $[2; +\infty[$. $f(2) = \frac{2^2 - 2\times 2 + 1}{2^2 - 2\times 2 + 2} = \frac{1}{2}$. La fonction f est croissante sur $[2; +\infty[$, et $f(2) > 0$, donc f ne s'annule pas sur $[2; +\infty[$.