

**Exercice 1** (Trigonométrie). *Prouver que pour tout  $t$  réel, on a :*

- $\cos t + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
- $\sin t + \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

On sait que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ . Donc :

$$\begin{aligned}\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos t \cos \frac{2\pi}{3} - \sin t \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \cos t \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin t \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos t \cos \frac{2\pi}{3} + \sin t \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \cos t \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sin t \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos t + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos t - \frac{1}{2} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \\ &= \cos t - 2 \times \frac{1}{2} \cos t \\ &= 0\end{aligned}$$

Second calcul est similaire, en prenant la formule de duplication des sinus.

**Exercice 2** (Droite et Cercle). *On se place dans une repère orthonormé.*

*On considère la droite  $d$  passant par  $A(6; 6)$  et de vecteur normal  $\vec{u}(2; 2)$ , et le cercle  $C$  de centre  $B(3; 2)$  et de rayon 5. Le but de l'exercice est de déterminer le(s) éventuel(s) point(s) d'intersection de  $d$  et  $C$ .*

1. Montrer qu'une équation réduite de  $d$  est  $y = 12 - x$ , et qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$ .

**Droite** Soit  $M(x, y)$  un point quelconque de  $d$ . Alors les vecteurs  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-6 \\ y-6 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} &= 0 \\ (x - 6) \times 2 + (y - 6) \times 2 &= 0 \\ 2x - 12 + 2y - 12 &= 0 \\ 2y &= 24 - 2x \\ y &= 12 - x \end{aligned}$$

**Cercle** Soit  $M$  un point du cercle de centre  $B(3; 2)$  et de rayon 5. Alors la distance  $BM$  vaut 5, et :

$$\begin{aligned} BM^2 &= 25 \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Soit  $M(x; y)$  un point appartenant à la fois à  $d$  et  $\mathcal{C}$ .

2. Montrer que  $x$  vérifie  $(x - 3)^2 + (10 - x)^2 = 25$ . Puisque  $M$  appartient  $\mathcal{C}$ , ses coordonnées  $(x; y)$  vérifient l'équation  $\mathcal{C}$ , et  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ . Mais  $M$  est dans  $d$  également, donc  $y = 12 - x$ . Utilisé dans l'équation précédente, cela donne :

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + (12 - x - 2)^2 &= 25 \\ (x - 3)^2 + (10 - x)^2 &= 25 \end{aligned}$$

3. En déduire que  $x$  vérifie  $x^2 - 13x + 42 = 0$ . En partant de l'équation précédente, on a :

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + (10 - x)^2 &= 25 \\ x^2 - 6x + 9 + 100 - 20x + x^2 &= 25 \\ 2x^2 - 26x + 84 &= 0 \\ x^2 - 13x + 42 &= 0 \end{aligned}$$

4. En déduire les valeurs possibles de  $x$ . Nous obtenons un trinôme du second degré, de discriminant  $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 42 = 1$ . Il est positif, donc il y a deux solutions qui sont  $x_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 6$  et  $x_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 7$ .

5. En déduire les coordonnées des points d'intersection de  $d$  et  $\mathcal{C}$ . Puisque  $y = 12 - x$ , et que  $x = 6$  ou  $x = 7$ , nous obtenons deux points d'intersection, de coordonnées respectives  $\binom{6}{12-6}$  soit  $\binom{6}{6}$  d'une part, et  $\binom{7}{12-7}$  soit  $\binom{7}{5}$  d'autre part.

**Exercice 3** (Droite et Cercle). On se place dans un repère orthonormé.

Étant donné un nombre réel  $\alpha$ , on considère la droite  $d_\alpha$  passant par  $A(\alpha; \alpha)$  et de vecteur normal  $\vec{u}(3; 3)$ , et le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $B(3; 2)$  et de rayon 5.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre  $d_\alpha$  et  $\mathcal{C}$ , en fonction de  $\alpha$ .

1. Montrer qu'une équation réduite de  $d_\alpha$  est  $y = 2\alpha - x$ , et qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$ .

**Droite** Soit  $M(x; y)$  un point quelconque de  $d_\alpha$ . Alors les vecteurs  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\alpha \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} &= 0 \\ (x - \alpha) \times 3 + (y - \alpha) \times 3 &= 0 \\ 2x - 2\alpha + 2y - 2\alpha &= 0 \\ 2y &= 4\alpha - 2x \\ y &= 2\alpha - x \end{aligned}$$

**Cercle** Voir la démonstration à la question 1 de l'exercice 2.

Soit  $M(x; y)$  un point appartenant à la fois à  $d_\alpha$  et  $\mathcal{C}$ .

2. Montrer que  $x$  vérifie  $(x - 3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 = 25$ , puis que  $x$  vérifie  $x^2 - (1 + 2\alpha)x + 2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$ . Puisque  $M$  est un point du cercle, alors  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ . D'autre part, puisque  $M$  est un point de la droite, alors  $y = 2\alpha - x$ . Donc :

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 &= 25 \\ (x - 3)^2 + (2\alpha - 2 - x)^2 &= 25 \\ x^2 - 6x + 9 + (2\alpha - 2)^2 - 2(2\alpha - 2)x + x^2 &= 25 \\ x^2 - 6x + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + (4 - 4\alpha)x + x^2 &= 25 \\ 2x^2 + (4 - 4\alpha - 6)x + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 - 25 &= 0 \\ 2x^2 - (2 + 4\alpha)x + 4\alpha^2 - 12 - 8\alpha &= 0 \\ x^2 - (1 + 2\alpha)x + 2\alpha^2 - 6 - 4\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Puisqu'à chaque valeur de  $x$  correspond une valeur de  $y$ , le nombre de points d'intersection de  $d_\alpha$  et  $\mathcal{C}$  est égal au nombre de solutions de cette équation du

second degré en  $x$ , et ce nombre dépend du signe du discriminant. Étudions ce discriminant  $\Delta$ .

3. Montrer que  $\Delta = -4\alpha^2 + 20\alpha + 25$ .

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(1+2\alpha))^2 - 4 \times 1 \times (2\alpha^2 - 6 - 4\alpha) \\ &= 1 + 4\alpha + 4\alpha^2 - 8\alpha^2 + 24 + 16\alpha \\ &= -4\alpha^2 + 20\alpha + 25\end{aligned}$$

4. Montrer que le signe de  $\Delta$ , en fonction de  $\alpha$ , est :

$\alpha$	$-\infty$	$\frac{5-5\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5+5\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$\Delta$	-	0	+	0

Nous obtenons un trinôme du second degré en  $\alpha$ , de discriminant  $20^4 - 4 \times (-4) \times 25 = 800 = 2 \times 20^2$ . Il est positif, donc le trinôme a deux racines  $\alpha_2 = \frac{-20 - \sqrt{2 \times 20^2}}{2 \times -4} = \frac{-20 - 20\sqrt{2}}{-8} = \frac{5+5\sqrt{2}}{2}$  et  $\alpha_1 = \frac{-20 + \sqrt{2 \times 20^2}}{2 \times -4} = \frac{-20 + 20\sqrt{2}}{-8} = \frac{5-5\sqrt{2}}{2}$ . Nous obtenons donc le tableau de signes demandé.

5. En déduire le nombre de points d'intersection de  $d_\alpha$  et  $\mathcal{C}$  en fonction de  $\alpha$ . Trois cas sont possibles :

- si  $\alpha \in ]\alpha_1; \alpha_2[$ , alors  $\Delta$  est strictement positif, le trinôme en  $x$  a deux solutions, et la droite et le cercle ont deux points d'intersection ;
- si  $\alpha = \alpha_1$  ou  $\alpha = \alpha_2$ , alors  $\Delta$  est nul, le trinôme en  $x$  a une seule solution, et la droite et le cercle ont un seul point d'intersection (dans ce cas, la droite est tangente au cercle) ;
- enfin, si  $\alpha < \alpha_1$  ou  $\alpha > \alpha_2$ , alors  $\Delta$  est strictement négatif, le trinôme en  $x$  n'a pas de solutions, et la droite et le cercle n'ont aucun points d'intersections (la droite est extérieure au cercle).