

Exercice 1 (Inéquation). Le but de l'exercice est de trouver les solutions de $x\sqrt{x} \geq 8$.

1. On appelle f la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.
 - (a) Étudier les variations de f .
 - (b) Trouver une solution évidente à $f(x) = 8$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation de départ.

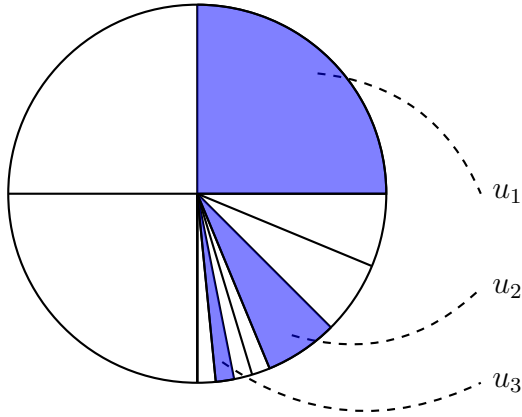
Exercice 2 (Partage de tarte). Le 14 mars 2015, à 9h26, pour célébrer le jour de π , vous partagez une tarte (assimilée à un cercle par la suite) avec deux amis. Vous souhaitez couper cette tarte en trois parts égales. Nous allons étudier différentes approches.

1. (*Optionnel*) *En utilisant la trigonométrie.* D'Euclide (≈ 300 ans avant J.C.) jusqu'à la fin du XIX^e siècle (avec entre autres Gauss et Wantzel, s'appuyant sur les avancées faites par Galois), les mathématiciens se sont intéressés aux constructions à la règle et au compas, c'est-à-dire à toutes les figures géométriques, ou plus simplement toutes les longueurs, pouvant être tracées en utilisant uniquement une règle non-graduée et un compas, en un nombre fini d'étapes.

En remarquant que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, proposer une méthode pour couper cette tarte en trois parts égales, à la règle (non graduée) et au compas. Il pourra être utile de se souvenir des méthodes de tracé vues au collège (symétrique, bissectrice, médiatrice, etc.).

2. *En utilisant les suites.* On commence par couper la tarte en quatre parts égales, et chacun des trois convives prend une part. Puis on coupe la part restante en quatre parts, et chacun prend une part. Puis on recommence sur la part restante, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste que des miettes.

On considère que l'aire de la tarte est égale à 1.



Soit la suite u définie sur \mathbb{N}^* par : « u_n est la taille de la part de tarte prise par chacun des convives après la n^e coupe ». Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3 .

- (a) i. Quelles sont les cinq premières valeurs de u ?
 ii. Calculer $\frac{1}{4^n}$, pour n valant 1, 2, 3, 4 puis 5.
 iii. Vérifier que pour les cinq premières valeurs de n , $u_n = \frac{1}{4^n}$.

On admet que ce résultat est vrai pour tous les nombres entiers naturels : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{4^n}$.

- (b) On note P_n la part totale de tarte de chaque convive après n coupes, c'est-à-dire la somme des parts prises au cours de ces coupes : $P_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- i. Calculer les cinq premières valeurs de P .
 ii. Vers quelle valeur semble tendre P ?

- (c) Conclure : Cette méthode permet-elle de découper la tarte en trois parts égales ?

- (d) (*Optionnel*) Étant donné un entier k non nul, refaire les questions (a) à (c) en considérant que l'on veut découper la tarte en k parts.

3. (*Optionnel*) *Pour aller plus loin Règle et compas* Dans la question 1, il a été question de couper un angle (l'angle plat) en trois angles égaux à la règle et au compas. Pouvez-vous trouver une méthode

pour découper un angle *quelconque* en trois angles égaux à la règle et au compas ? Vous pouvez chercher de l'aide sur internet.