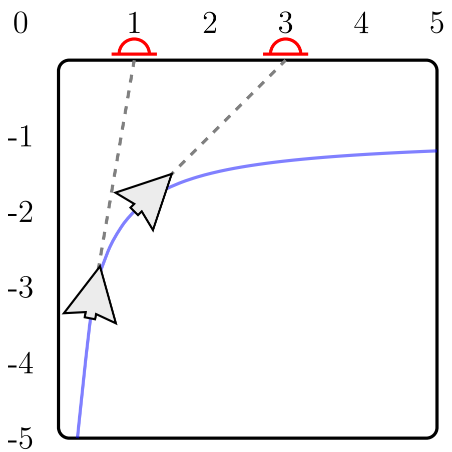
Exercice 2 (Tangente). *La figure ci-dessous représente un écran de jeu vidéo. Un avion remonte l'écran de gauche à droite en suivant la courbe d'équation* $y = -1 - \dfrac{1}{x}$

L'avion peut tirer des missiles selon la tangente à sa trajectoire.



1. *Montrer que l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse* a *est* $y = \frac{x-a^2-2a}{a^2}$. La formule générale de la tangente à f en a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. La dérivée de la fonction f est ici $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, donc la formule de la tangente est :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a^2}(x-a) - 1 - \frac{1}{a} \\ &= \frac{x-a}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} - \frac{a}{a^2} \\ &= \frac{x-a-a^2-a}{a^2} \\ &= \frac{x-a^2-2a}{a^2} \end{aligned}$$

2. *En quels points de sa trajectoire, l'avion doit-il tirer ses missiles pour abattre successivement les deux monstres situés en haut de l'écran en* $A\binom{1}{0}, B\binom{3}{0}$ Pour atteindre le monstre situé en A, il faut que le missile, donc la tangente, passe par le point A. Il faut donc (en remarquant que $a \neq 0$) que :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1 - a^2 - 2a}{a^2} \\ 0 &= 1 - a^2 - 2a \\ 0 &= a^2 + 2a - 1 \end{aligned}$$

C'est un trinôme du second degré : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8$. Le discriminant étant positif, il y a deux racines :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-2 - \sqrt{8}}{2 \times 1} & &= -\frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \\ a_2 &= \frac{-2 + \sqrt{8}}{2 \times 1} & &= \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

La première solution étant négative, elle n'est pas valide. Reste la seconde : l'avion doit être au point d'absisse $-1 + \sqrt{2}$ pour tuer le premier monstre.

Le même raisonnement avec le deuxième point B $(3; 0)$ donne deux solutions, dont une seule est acceptable : le point d'abscisse $a = 1$.