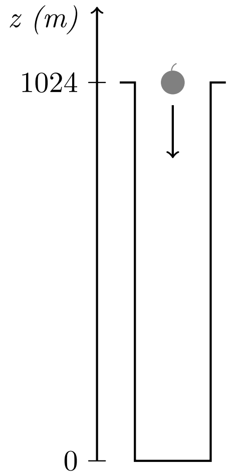
Exercice 1 (Application à la physique).

Isaac voudrait déterminer la valeur de g, intensité de la pesanteur, chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puits d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de 1 024 m, et chronomètre son temps de chute.

L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puits : elle est de 0 m au fond, et 1 024 m en haut.



Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme $z : t \mapsto at^2 + bt + c$, où t est le temps de chute. Par exemple, $z(0)$ est l'altitude initiale, et $z(3)$ est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a, b et c, pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g.

(1) *Combien vaut l'altitude initiale $z(0)$? En déduire que $c = 1024$.* Au début de la chute (à $t = 0$), la pomme est au sommet du puits, soit à une altitude de 1024 m. Donc $z(0) = 1024$. Or $z(0) = a\times 0^2+b\times 0+c = c$. Donc $c = 1024$.

(2) *La vitesse v de la chute est égale à la dérivée de la fonction z. Par exemple, $v(2) = z'(2)$ est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.*

   (a) *Dériver z, et en déduire l'expression de v en fonction de a et b.* La fonction z est un polynôme, donc sa dérivée est $v(t) = z'(t) = 2at + b$.

   (b) *Quelle est la vitesse initiale ? En déduire que $b = 0$.* La pomme est lâchée du haut du puits, donc sa vitesse initiale est nulle : $v(0) = 0$. Or, nous venons de montrer que $v(t) = 2at + b$. Donc $0 = v(0) = 2a \times 0 + b = b$, donc $b = 0$.

(c) *Exprimer z et v en fonction de a et t.* Les questions précédentes montrent que $z(t) = at^2 + 1024$, et $v(t) = 2at$.

(3) *Isaac, aidé de Gottfried, a mesuré que la chute a duré 14,5*s. *Traduire cette information par une équation, et montrer que $a = -4,87$.* Cela signifie que la pomme touche le sol au bout de 14,5 secondes, donc que $z(14,5) = 0$. Donc $a \times 14,5^2 + 1024 = 0$, ce qui donne $a = -\frac{1024}{14,5^2} \approx -4,87$.

(4) *Calculer la dérivée de v ; c'est une constante égale à $-g$. Conclure en déterminant la valeur de g.* Puisque $v(t) = 2at$, $v'(t) = 2a$, donc $-g = 2a$ et $g = -2a \approx -2 \times -4,87 \approx 9,74$ (pour information, l'unité de g est $m.s^{-2}$, mais ça n'était pas demandé).

Exercice 2 (Moyenne et écart-type)**.**

1. *Pour cette question, vous pouvez vous servir d'un tableur ou d'une calculatrice.* Pour relever « artificiellement » les notes d'un devoir, un professeur hésite entre deux méthodes : ajouter un demi-point à toutes les copies, ou multiplier la note de chaque copie par 1,1.

   (a) *Choisir aléatoirement une série de notes, et calculer la moyenne et l'écart-type.* Ces données ont été obtenues à l'aide d'un tableur.

											$\bar{x}$	σ
Notes	5	11	19	8	19	17	15	0	2	14	11,00	6,96
$+0,5$	5,5	11,5	19,5	8,5	19,5	17,5	15,5	0,5	2,5	14,5	11,50	6,96
$\times 1,1$	5,5	12,1	20,9	8,8	20,9	18,7	16,5	0	2,2	15,4	12,10	7,66

   (b) *Ajouter 0,5 à chaque note. Comment évoluent la moyenne et l'écart-type ?* Voir la seconde ligne du tableau. On observe que la moyenne est augmentée de 0,5, mais que l'écart-type ne change pas.

   (c) *Multiplier chaque note par 1,1. Comment évoluent la moyenne et l'écart-type ?* Voir la troisième ligne du tableau. On remarque que la moyenne est multipliée par 1,1, de même que l'écart-type.

2. Cette question est difficile à ce stade. Essayez, mais ne vous découragez pas si vous ne réussissez pas. *On considère une série statistique de valeurs x_1, x_2, ..., x_p et d'effectifs n_1, n_2, ..., n_p (on note N l'effectif total).*

   (a) *Rappeler la formule permettant de calculer la moyenne $\bar{x}$, et celle de l'écart-type σ.*

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \qquad V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

(b) *On ajoute 0,5 à chaque valeur de la série. Montrer que la nouvelle moyenne $\bar{x}_+$ est égale à $\bar{x}+0,5$. Montrer que le nouvel écart-type σ_+ est égal à σ.*

$$\begin{aligned}
\bar{x}_+ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i+0,5) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} (n_i x_i + 0,5 n_i) \\
&= \frac{1}{N}\left(\left(\sum_{i=1}^{p} n_i x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{p} 0,5 n_i\right)\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i x_i\right) + \frac{0,5}{N}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\right) \\
&= \bar{x} + \frac{0,5}{N}N \text{ car } \sum_{i=1}^{p} n_i = N \\
&= \bar{x}+0,5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_+ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i+0,5-\bar{x}_+\right)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i+0,5-(\bar{x}+0,5)\right)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i+0,5-\bar{x}-0,5\right)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \\
&= V
\end{aligned}$$

Donc $V_+ = V$, et $\sigma_+ = \sigma$.

(c) *On multiplie chaque valeur de la série d'origine par $1,1$. Montrer que la nouvelle moyenne $\bar{x}_\times$ est égale à $1,1\bar{x}$. Montrer que le nouvel écart-type $\sigma_\times$ est égal à $1,1\sigma$.*

$$\begin{aligned}
\bar{x}_\times &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i 1,1 x_i \\
&= \frac{1,1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \\
&= 1,1\bar{x}
\end{aligned}$$

Pour calculer l'écart-type, commençons par calculer la variance V :

$$\begin{aligned}
V_\times &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(1,1x_i-\bar{x}_\times\right)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(1,1x_i-1,1\bar{x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} 1,1^2 n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \\
&= 1,1^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \\
&= 1,1^2 V
\end{aligned}$$

Donc $V_\times = 1,1^2 V$, et

$$\begin{aligned}
\sigma_\times &= \sqrt{V_\times} \\
&= \sqrt{1,1^2 V} \\
&= 1,1\sqrt{V} \\
&= 1,1\sigma
\end{aligned}$$

Exercice 3 (Défi (optionnel))**.** Calculer :

$$p = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} ij$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} ij &= \sum_{i=1}^{100} \left(i \sum_{j=1}^{100} j \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{100} j \right) \left(\sum_{i=1}^{100} i \right) \\
&= \left(\frac{100 \times (100+1)}{2} \right) \left(\frac{100 \times (100+1)}{2} \right) \\
&= \left(\frac{100 \times (100+1)}{2} \right)^2 \\
&= 25502500
\end{aligned}$$

On pouvait également calculer cela avec un algorithme, ce qui donne le même résultat.

```
somme ← 0
for i from 1 to 100
  for j from 1 to 100
    somme ← somme + i × j
  FinPour
FinPour
Afficher somme
```