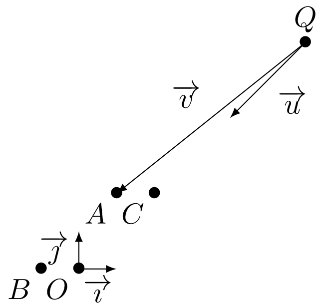
Vecteurs Dérivation
Corrigé

Exercice 1 (Changement de repère)**.** Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(1,2)$, $B(-1,0)$ et $C(2,2)$.

1. *Déterminer les coordonnées (dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$) d'un point Q et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que les coordonnées de A, B et C dans le repère $(Q, \vec{u}, \vec{v})$) soient respectivement $A(0,1)$, $B(1,1)$ et $C(2,0)$.*
   On cherche les coordonnées $Q(x_q, y_q)$, $\vec{u}(x_u, y_u)$ et $\vec{v}(x_v, y_v)$.
   On veut que les coordonnées de A dans le repère $(Q, \vec{u}, \vec{v})$ soient $(0,1)$. Cela signifie (par définition des coordonnées), que $\overrightarrow{QA} = 0 \times \vec{u} + \vec{v} = \vec{v}$. Cela correspond aux équations suivantes pour les coordonnées (dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $\begin{cases} x_a - x_q = & x_v \\ y_a - y_q = & y_v \end{cases}$ Et donc, puisque les coordonnées de A sont connues : $\begin{cases} 1 - x_q = & x_v \\ 2 - y_q = & y_v \end{cases}$
   En faisant le même raisonnement pour les points B et C, on obtient : $\begin{cases} -1 - x_q = & x_u + x_v \\ -y_q = & y_u + y_v \end{cases}$ et $\begin{cases} 2 - x_q = & 2x_u \\ 2 - y_q = & 2y_u \end{cases}$.
   Nous obtenons un système de six équations à six inconnues. Intéressons nous uniquement aux abscisses :
   $$\begin{cases} 1 - x_q = & x_v \\ -1 - x_q = & x_u + x_v \\ 2 - x_q = & 2x_u \end{cases}$$
   En divisant la troisième équation par 2, nous obtenons $1 - \frac{x_q}{2} = x_u$. Nous pouvons maintenant, par substitution, remplacer x_u et x_v par leurs valeurs dans la seconde équation : $-1 - x_q = 1 - x_q + 1 - \frac{x_q}{2}$ et donc, après résolution : $x_q = 6$.
   Nous pouvons maintenant déterminer les valeurs de x_u et x_v, puisqu'elles ne dépendent que de x_q : $\begin{cases} 1 - 6 = & x_v \\ 2 - 6 = & 2x_u \end{cases}$. Et donc $x_u = -2$ et $x_v = -5$.
   En faisant le même raisonnement avec les ordonnées, nous obtenons $\begin{cases} y_q = & 6 \\ y_u = & -2 \\ y_v = & -4 \end{cases}$.

Bilan : Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a pour coordonnées : $Q\,(6,6)$, $\vec{u}\,(-2,-2)$ et $\vec{v}\,(-5,-4)$. Placés dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, cela donne :



2. *Modifier les coordonnées (anciennes et nouvelles) de A, B et C pour que l'exercice n'ai pas de solution.*

   Considérons les points $A(1,1)$, $B(2,1)$ et $C(3,1)$ (dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$), et cherchons les coordonnées de Q, $\vec{u}$, $\vec{v}$ telles que les coordonnées de A, B et C soient $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.

   Vues les nouvelles coordonnées de A, B et C, on a $A = Q$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Donc (A, B, C) est un repère. Mais A, B et C sont alignés, donc ils ne peuvent pas constituer un repère : le problème n'a pas de solutions.

Exercice 2. Il y a différentes manières de résoudre ce problème ; en voici une utilisant la colinéarité des vecteurs.

Nous nous plaçons dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où $\vec{\imath}$ est un vecetur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, de même sens, et de norme (de « longueur ») 1, et $\vec{\jmath}$ est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AD}$, de même sens, et de norme 1. Dans ce repère, les points E, C et F ont pour coordonnées : $E(0,13)$, $C(8,8)$, et $F(21,0)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ ont donc pour coordonnées $\overrightarrow{EC}(8,-5)$, et $\overrightarrow{CF}(13,-8)$. Vérifions la condition de colinéarité :

$$13 \times -5 - 8 \times -8 = -65 + 64 = -1$$

Donc la condition de colinéarité n'est pas respectée : les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points E, C et F ne sont pas alignés.

Pour information, voici d'autres méthodes possibles.

— Calculer, avec le théorème de Pythagore, les longueurs de EC, EC et EF pour montrer que $EC + CF \neq EF$.

— Supposer que $C \in [EF]$, et voir que le théorème de Thalès entraine une contradiction : donc l'hypothèse de départ est fausse.

— Vérifier que la somme des aires de $ABDC$, CBF et EDC n'est pas égale à l'aire de EAF.

— Dans un repère, calculer une équation de la droite (EF) et vérifier que les coordonnées de C ne la vérifient pas.

Exercice 3 (Calcul de fonction dérivées)**.**

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$, et a un réel.

   (a) Calculons le taux d'accroissement :

   $$\begin{aligned}&\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &=\frac{2ah+h^2}{h}\\ &=2a+h\end{aligned}$$

   (b) Lorsque h tend vers 0, $2a+h$ tend vers $2a$. Donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$. Nous avons montré que $f'(a) = 2a$.

   (c) *Application :* $f'(2) = 2 \times 2 = 4$. Voir le graphique à la fin.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, et a un réel non nul.

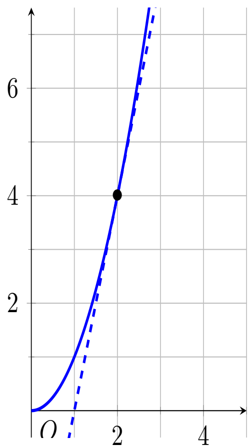
   (a) Calculons le taux d'accroissement :

   $$\begin{aligned}&\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}\\ &=\frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}\\ &=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}\\ &=\frac{-h}{a\,(a+h)}\times\frac{1}{h}\\ &=-\frac{1}{a\,(a+h)}\end{aligned}$$

   (b) Lorsque h tend vers 0, $a+h$ tend vers a, donc $-\frac{1}{a(a+h)}$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$. Donc $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

   (c) $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$. Voir le graphique à la fin.

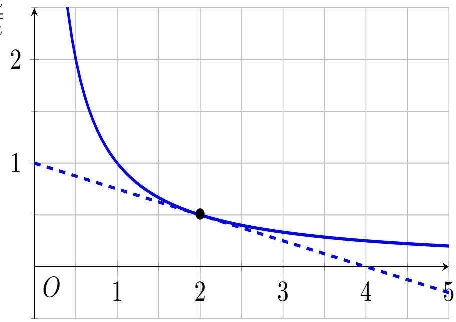
3. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}^+$, et a un réel strictement positif.



Fonction carrée

   (a) Calculons le taux d'accroissement :

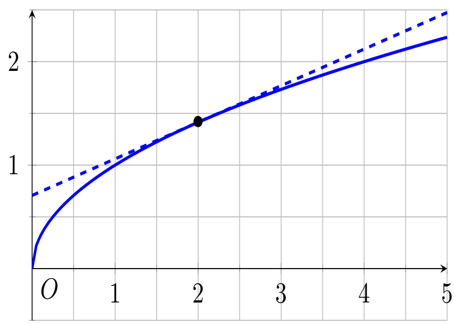
$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\\
&=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\times\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\\
&=\frac{\sqrt{a+h}^2-\sqrt{a}^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\\
&=\frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}
\end{aligned}$$



Fonction inverse

   (b) Lorsque h tend vers 0, $\sqrt{a+h}$ tend vers $\sqrt{a}$, donc le taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

   (c) $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0,35$. Voir le graphique ci-contre.



Fonction racine