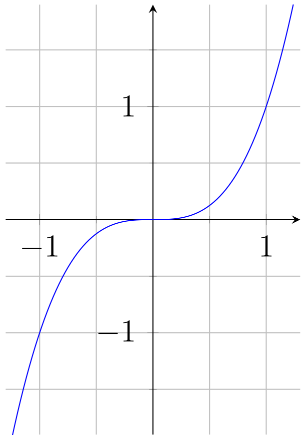
Exercice 1 (Fonction cube). *On appelle* fonction cube *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^3$.

(a) *Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les variations de cette fonction sur* $\mathbb{R}$. La courbe de cette fonction est tracée ci-contre.



On peut donc conjecturer que la fonction est croissante sur l'ensemble des réels (avec éventuellement un doute sur le comportement en 0, mais un zoom sur cette zone semble montrer qu'elle est tout de même croissante en 0).

(b) *Justifier que, si* $a < 0 < b$*, alors* $a^3 < b^3$. Soit a un nombre strictement négatif, et b un nombre strictement positif. Alors $a^3 = a^2 \times a$. Étant un carré, a^2 est strictement positif, donc a^3 est strictement négatif. De plus, b^3 est un produit de trois termes strictement positifs : il est strictement positif.

Donc a^3 étant un nombre strictement négatif, b^3 étant un nombre strictement positif, on a nécessairement : $a^3 < b^3$.

(c) (i) *Montrer que pour tous réels a et b, on a :*

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

a et b étant deux nombres réels quelconques, on développe le membre de droite. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

(ii) *Quel est le signe de a^2+ab+b^2 si a et b sont de même signe ?*

Si a et b sont de même signe, alors $ab \geqslant 0$. De plus, a^2 et b^2 sont toujours positifs car ce sont des carrés. Donc a^2+ab+b^2 est positif (strictement si a ou b est non nul).

(d) *Déduire des questions précédentes que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $a^3 < b^3$. Conclure.*

Premier cas : $a < 0 < b$. Nous avons montré à la question (i) que $a^3 < b^3$.

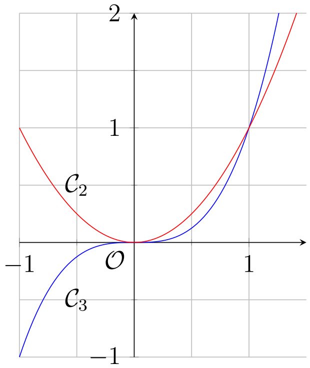
Deuxième cas : $0 < a < b$ ou $a < b < 0$. Alors a et b sont de même signe, et nous avons montré à la question précédente que $a^2 + ab + b^2$ est strictement positif. De plus, $a - b < 0$ (car $a < b$), donc $(a-b)(a^2+ab+b^2) < 0$, donc $a^3 - b^3 < 0$, et $a^3 < b^3$.

Bilan : Pour tout $a < b$, $a^3 < b^3$.

(e) *Établir le tableau de variation de la fonction cube.*

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
x^3	$\nearrow$

(f) *Tracer sur l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions carré et cube. Étudier (par le calcul) les positions relatives de ces deux courbes.*



La conjecture que nous pouvons faire en étudiant les courbes représentatives ci-contre ($\mathcal{C}_2$ pour la fonction carrée, et $\mathcal{C}_3$ pour la fonction cube) est que la courbe de la fonction carrée est au dessus de la courbe de la fonction cube sur $]-\infty; 1]$, et en dessous ailleurs. Prouvons le.

Soit $d : x \mapsto x^3 - x^2$ la fonction égale à la différence des fonctions cubes et carrées. Nous pouvons factoriser d en $d(x) = x^2\,(x-1)$, et faire son tableau de signes.

x	$-\infty$		0		1		∞
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

La courbe de la fonction carrée est en dessous de celle de la fonction cube si et seulement si $d(x)$ est positif, donc :

— La courbe de la fonction carrée est au dessus de celle de la fonction cube sur $]-\infty; 1]$;
— elle est en dessous sur $[1; +\infty[$;
— elles sont confondues en 0 et 1.

Exercice 2 (Valeur absolue et Changement de variables)**.** *Le but de l'exercice est de résoudre l'équation* $3x^2-7|x|-6=0$.

(a) *Montrer que pour tout x réels, $|x|^2 = x^2$.* Soit x un réel quelconque. Alors :

$$|x|^2 = |x| \times |x| = |x \times x| = \left|x^2\right|$$

Or un carré étant toujours positif, $|x^2| = x^2$. Donc $|x|^2 = x^2$.

(b) *On pose $X = |x|$. En déduire que résoudre l'équation originale revient à résoudre l'équation $3X^2-7X-6=0$.*

$$\begin{aligned} 3x^2 - 7|x| - 6 &= 3|x|^2 - 7|x| - 6 \\ &= 3X^2 - 7X - 6 \end{aligned}$$

Donc résoudre $3x^2 - 7|x| - 6 = 0$ revient à résoudre $3X^2 - 7X - 6 = 0$.

(c) *Résoudre cette équation en X.* On calcule le discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 121 = 11^2$. L'équation a donc deux solutions $\frac{-(-7)-\sqrt{121}}{2\times 3} = -\frac{2}{3}$ et $\frac{-(-7)+\sqrt{121}}{2\times 3} = 3$.

(d) *En déduire les solutions de l'équation originale en x.* Nous avons trouvé $X = 3$ ou $X = -\frac{2}{3}$. Or $X = |x|$.

Donc $|x| = 3$ ou $|x| = -\frac{2}{3}$. La seconde alternative est impossible (car une valeur absolue ne peut pas être négative) ; étudions la première :

$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ ou } & -x &= 3 \\ x &= 3 \text{ ou } & x &= -3 \end{aligned}$$

L'équation a donc deux solutions : 3 et -3.