

Exercice 1 (Cours et application directe — 9 points). Les questions sont indépendantes.

- Démontrer que pour tous réels a et b , on a :

$$\cos(b - a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

- En utilisant la formule du sinus de la somme ($\sin(a + b) = \dots$), prouver que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

- Soit un parallélogramme $ABCD$, avec $AB = 2$, $AD = 5$, $AC = 6$. Calculer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- Soit un triangle ABC tel que $AB = 2$, $BC = 3$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$. Déterminer AC .

Exercice 2 (Dérivation — 3 points). On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = x - \sqrt{x}$, dérivable sur \mathbb{R}^{+*} (l'ensemble des réels positifs non nuls).

- Calculer $f'(x)$ (pour $x > 0$).
- Résoudre $f'(x) > 0$.
- En déduire les variations de f .

Exercice 3 (Géométrie — 8 points). Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(3; 2)$, \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$, et \vec{n} le vecteur de coordonnées $(-2; 1)$.

- Équations
 - Déterminer une équation de \mathcal{C} .
 - Montrer que l'équation cartésienne de \mathcal{D} , la droite passant par A de vecteur normal \vec{n} , est $-2x + y + 4 = 0$.
 - Donner son équation réduite.
- Soit $M(x; y)$ un point d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} (on admet qu'un tel point existe).
 - Montrer que x vérifie l'équation $5x^2 - 30x + 40 = 0$.
 - Résoudre cette équation.
 - En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} .