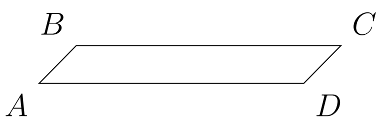
Devoir surveillé

Une heure

Exercice 1 (Cours et application directe — 9 points)**.**

1. *Démontrer que pour tous réels a et b, on a :* $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$*.* Voir le cours.
2. *En utilisant la formule du sinus de la somme (*$\sin(a+b) = \dots$*), prouver que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a :* $\sin(x+\pi) = -\sin x$*.* Quels que soient a et b réels, on a $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. Donc $\sin(x+\pi) = \sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x = \sin x \times -1 + 0 \times \cos x = -\sin x$.
3. *Soit un parallélogramme $ABCD$, avec $AB = 2$, $AD = 5$, $AC = 6$. Calculer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.*



$ABCD$ étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(6^2 - 2^2 - 5^2\right) = \frac{7}{2}$

4. *Soit un triangle ABC tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$. Déterminer AC.* On applique le théorème d'Al Kashi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABc}$.
Donc $AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3}$
$AC^2 = 7$, et $AC = \sqrt{7}$.

Exercice 2 (Dérivation — 3 points)**.** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (l'ensemble des réels positifs non nuls).

1. *Calculer $f'(x)$ (pour $x > 0$).* $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. *Résoudre $f'(x) > 0$.*
$1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} > 1$ car $\sqrt{x}$ est positif.
$\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$ car $\sqrt{x}$ est positif.
3. *En déduire les variations de f.*

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 3 (Géométrie — 8 points)**.** Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(3;2)$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$, et $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(-2;1)$.

1. Équations
   (a) *Déterminer une équation de $\mathcal{C}$.* C'est une application directe du cours : $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ (en remarquant que $\sqrt{5}^2=5$).
   (b) *Montrer que l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$, la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, est $-2x+y+4=0$.* Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{D}$. Alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, et $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$. En notant que les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x-3,y-2)$, on obtient : $(x-3)\times -2+(y-2)\times 1=0$, ce qui, développé, donne l'équation demandée.
   (c) *Donner son équation réduite.* On isole y dans l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$, et on obtient $y=2x-4$.
2. Soit $M(x;y)$ un point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ (on admet qu'un tel point existe).
   (a) *Montrer que x vérifie l'équation* $5x^2-30x+40=0$. Dans l'équation de $\mathcal{C}$ trouvée en question 1a, on remplace y par la valeur trouvée en question 1c. On obtient : $(x-3)^2+(2x-4-2)^2=5$, ce qui, développé, donne l'équation demandée.
   (b) *Résoudre cette équation.* C'est un trinôme du second degré. Le discriminant vaut $\Delta=(-30)^2-4\times 5\times 40=100=10^2$. Il est strictement positif, donc il y a deux racines qui valent $x_1=\frac{-(-30)-\sqrt{\Delta}}{2\times 5}=2$ et $x_2=\frac{-(-30)+\sqrt{\Delta}}{2\times 5}=4$.
   (c) *En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.* Nous avons trouvé deux abscisses x_1 et x_2. Les ordonnées correspondantes sont les images de ces valeurs par l'équation réduite trouvée à la question 1c, c'est-à-dire, respectivement $2\times 2-4=0$ et $2\times 4-4=4$. Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont donc les points de coordonnée $(2,0)$ et $(4,4)$.