

DEVOIR SURVEILLÉ
Deux heures

Le barème est sur 30 points.

Exercice 1 (Temps d'attente — 3 points). Une gérante veut mettre en place les files d'attente dans son nouveau magasin. Elle hésite entre deux méthodes :

1. il y a une file d'attente pour chaque caisse (comme dans les supermarchés) ;
2. il y a une seule file d'attente pour toutes les caisses, et les clients sont répartis au dernier moment vers une caisse libre (comme dans les gares SNCF).

Pour choisir, elle simule une fois pour chacune des deux méthodes, l'arrivée de 1000 clients, dans les mêmes conditions. Elle observe les temps d'attente suivants pour la file type « supermarché » :

Temps d'attente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	32	101	150	145	98	122	123	101	60	68

Pour la file de type « SNCF », elle obtient un temps d'attente moyen de 5,4 minutes, et un écart-type de 1,9 minutes.

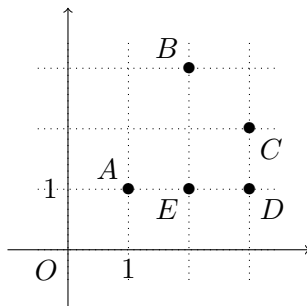
1. Calculer la moyenne et l'écart-type des temps d'attente de la file type « supermarché ».
2. Quelle type de file choisiriez-vous ?

Exercice 2 (Produit scalaire — 5 points).

1. En utilisant la méthode de votre choix, calculer les produits scalaires suivants.

(a) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

(b) $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$



2. On place un point M sur la droite (BE) ; ses coordonnées sont donc $(2, y)$ (où y est un réel).

(a) Montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = y^2 - 3y + 1$.

(b) Résoudre $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.

(c) Quels sont les points M de (BE) tels que les droites (MA) et (MC) soient perpendiculaires ?

Exercice 3 (Jeu — 5 points). Un opérateur de téléphonie mobile souhaite réaliser une enquête auprès de ses abonnés. Pour les inciter à répondre, il propose aux participants un tirage au sort, dans lequel ils peuvent gagner 30 minutes de communication une fois sur six, 20 minutes une fois sur trois et 10 minutes sinon.

On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de minutes gagnées.

1. (a) Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X .

(b) Que représente cette espérance ?

2. Pour motiver les adolescents, l'opérateur remplace dans le tirage au sort chaque minute de communication par 5 SMS. On appelle Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de SMS gagnés.

(a) Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de X .

(b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y .

Exercice 4 (Trigonométrie — 5 points).

1. Résoudre les équations $\sin x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{3}{2}$.

2. Le but de cette question est de trouver les solutions de l'équation $4(\cos(\frac{\pi}{2} - x))^2 - 8\sin x + 3 = 0$.

(a) Montrer que l'équation est équivalente à $4t^2 - 8t + 3 = 0$, où $t = \sin x$.

(b) Déterminer les racines de ce trinôme en t .

(c) En déduire les solutions de l'équation en x .

Exercice 5 (Optimisation — 9 points). L'objectif du problème est d'étudier la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ par $f(x) = 6x^2 + \frac{12}{x}$, et d'utiliser cette étude pour résoudre un problème d'optimisation.

1. (a) Justifier que f est dérivable sur \mathcal{D}_f et déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout x de \mathcal{D}_f .
(b) Montrer que $f'(x) = 12 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.
(c) Étudier le signe de f' sur \mathcal{D}_f , en justifiant chaque étape.
(d) En déduire les variations de f sur \mathcal{D}_f .
2. On construit un réservoir fermé en tôle, en forme de parallélépipède rectangle de hauteur h , et dont la base est un rectangle de côtés x et $3x$, où x et h sont des longueurs, en mètres.
 - (a) Exprimer l'aire S de la tôle utilisée et le volume V du réservoir en fonction de x et h .
 - (b) On suppose que le volume du réservoir est $4,5 \text{ m}^3$.
 - i. Exprimer la hauteur h en fonction de x .
 - ii. En déduire que la surface S est égale à $f(x)$ (où f est la fonction étudiée dans la question précédente).
 - iii. À l'aide de la première question, déterminer x tel que l'aire de S soit minimale. Donner alors les dimensions du réservoir.

Exercice 6 (Problème ouvert — 3 points). *Toute trace de recherche, même incomplète, sera valorisée.*

Vous jouez au jeu suivant avec un ami : vous tirez chacun, avec remise, une carte d'un jeu de 52 cartes (l'as étant considéré comme la carte la plus forte). Si l'un des deux joueurs a une carte de valeur plus élevée que celle de l'autre joueur, il gagne. Sinon, il y a match nul.

Quelle est votre probabilité de victoire ?

Rappel : Un jeu de 52 cartes est constitué de quatre séries de cartes 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as, dans chacune des quatre couleurs pique, cœur, carreau, trèfle. La couleur n'a pas d'influence sur la valeur des cartes.