Devoir surveillé

Correction

Exercice 1 (Temps d'attente).

Temps d'attente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	32	101	150	145	98	122	123	101	60	68

Pour la file de type « SNCF », elle obtient un temps d'attente moyen de 5,4 minutes, et un écart-type de 1,9 minutes.

1. La file type « supermarché » a une moyenne de 5,4 minutes et un écart-type de 2,5 minutes.
2. Pour les deux types de files, les clients attendent, en moyenne, autant. En revanche, pour la file type « SNCF », l'écart-type est inférieur, ce qui signifie que les temps d'attente sont plus réguliers, donc que les clients auront moins l'impression « d'avoir choisi la mauvaise file ».

Exercice 2 (Produit scalaire).

1. Plusieurs expressions du produit scalaire étaient utilisables ; j'en donne quelques exemples.
   (a) *Méthode 1 :* Le projeté orthogonal de B sur $[AD]$ est E, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = AE \times AD = 2$.
   Méthode 2 : Avec les coordonnées : $\overrightarrow{AB}\binom{1}{2}$; $\overrightarrow{AD}\binom{2}{0}$, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 1 \times 2 + 2 \times 0 = 2$.
   (b) *Méthode 1 :* Avec les coordonnées : $\overrightarrow{AC}\binom{2}{1}$; $\overrightarrow{BD}\binom{1}{-2}$, donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 2 \times 1 + 1 \times -2 = 0$.
   Méthode 2 : Avec les normes : $\left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| = \sqrt{5}$; $\left|\left|\overrightarrow{BD}\right|\right| = \sqrt{5}$; $\left|\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\right| = \sqrt{10}$. Donc
   $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\left|\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{BD}\right|\right|^2\right)$
   $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(10-5-5) = 0$
2. On place un point M sur la droite (BE) ; ses coordonnées sont donc $(2, y)$ (où y est un réel).

(a) *Montrer que* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = y^2 - 3y + 1$. Les coordonnées des vecteurs concernés sont $\overrightarrow{AM}\binom{1}{y-1}$; $\overrightarrow{CM}\binom{-1}{y-2}$. Donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 1 \times -1 + (y-1) \times (x-2)$, et on retrouve l'expression demandée en développant.

(b) *Résoudre* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0$. L'expression $y^2 - 3y + 1$ est un trinôme du second degré. Cherchons ses racines. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$. Donc il y a deux racines, qui sont $y_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(c) *Quels sont les points M de (BE) tels que les droites (MA) et (MC) soient perpendiculaires ?* Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MC}$ étant non nuls, les points M tels que (MA) et (MC) sont perpendiculaires sont les points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0$, c'est-à-dire les points de coordonnées $\binom{2}{y}$, où y est une des racines du trinôme de la question précédente. Ainsi, on a $M(2, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ ou $M(2, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

Exercice 3 (Jeu)**.** Un opérateur de téléphonie mobile souhaite réaliser une enquête auprès de ses abonnés. Pour les inciter à répondre, il propose aux participants un tirage au sort, dans lequel ils peuvent gagner 30 minutes de communication une fois sur six, 20 minutes une fois sur trois et 10 minutes sinon.

On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de minutes gagnées.

1. (a) *Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.* La loi de probabilité de la variable X est donnée par le tableau suivant.

x_i	30	20	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

L'espérance est donc $E(X) = \frac{30}{6} + \frac{20}{3} + \frac{10}{2} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \approx 16,7$. La variance est $V(X) = \frac{30^2}{6} + \frac{20^2}{3} + \frac{10^2}{2} - \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{500}{9} \approx 55,6$. Donc $\sigma(X) = \sqrt{\frac{500}{9}} = \frac{10\sqrt{5}}{3} \approx 7,5$.

(b) *Que représente cette espérance ?* Elle représente le nombre de minutes moyen gagné par les joueurs.

2.

   (a) *Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de X.* $Y = 5X$.

   (b) *En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.* $E(Y) = E(5X) = 5E(X) = \frac{250}{3} \approx 83,3$; $V(Y) = V(5X) = 25V(X) = \frac{12500}{9} \approx 1388,9$.

Exercice 4 (Trigonométrie)**.**

1. *Résoudre les équations* $\sin x = \frac{1}{2}$ *et* $\sin x = \frac{3}{2}$.
   - $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, donc $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
   - $\frac{3}{2}$ est strictement supérieur à 1, donc $\sin x = \frac{3}{2}$ n'a pas de solutions.
2. Le but de cette question est de trouver les solutions de l'équation $4\left(\cos(\frac{\pi}{2} - x)\right)^2 - 8\sin x + 3 = 0$.

   (a) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, donc l'équation étudiée est égale à $4\left(\sin(x)\right)^2 - 8\sin x + 3 = 0$, et donc, en posant $t = \sin x$, elle est équivalente à $4t^2 - 8t + 3 = 0$.

   (b) $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 16 = 4^2$. Donc les solutions sont $t_1 = \frac{-(-8)-4}{2\times4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $t_2 = \frac{-(-8)+4}{2\times4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

   (c) Puisque $t = \frac{1}{2}$ ou $t = \frac{3}{2}$, et que $\sin x = t$, alors $\sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = \frac{3}{2}$, ce qui signifie (d'après la première question) que $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Exercice 5 (Optimisation)**.**

1. (a) La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$ en tant que fonction polynôme (dérivable sur $\mathbb{R}$) et fonction inverse (dérivable sur $\mathbb{R}^*$).
   La dérivée de f est $f'(x) = 6 \times 2x + 12 \times -\frac{1}{x^2} = 12x - \frac{12}{x^2}$

   (b) *Montrer que* $f'(x) = 12\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.
   $12\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} = 12\frac{x^3+x^2+x-x^2-x-1}{x^2}$
   $= 12\frac{x^3-1}{x^2} = \frac{12x^3-12}{x^2} = \frac{12x^3}{x^2} - \frac{12}{x^2} = 12x - \frac{12}{x^2} = f'(x)$

(c) *Étudier le signe de f' sur $\mathcal{D}_f$, en justifiant chaque étape.* Les expressions 12, x^2 et x^2+x+1 sont toujours positives (pour x^2+x+1, $\Delta = 1-4 = -3$, donc f est du signe de a, c'est-à-dire positive). Donc la fonction f', sur son domaine de définition, est du signe de $x-1$, c'est-à-dire négative pour $x \leqslant 1$, positive ensuite.

Remarque : Une justification avec un tableau de signe était parfaitement acceptable.

(d) *En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.* La dérivée de f, sur son domaine de définition, étant négative pour $x \leqslant 1$, et positive sinon, la fonction f est décroissante pour $x \leqslant 1$, et croissante ensuite. Ce résultat peut être résumé par le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

2. (a) *Volume :* Le volume d'un pavé droit est le produit des mesures des trois dimensions, donc $V = x \times 3x \times h = 3x^2h$.

Aire : L'aire d'un pavé droit est la somme des aires de chacune des faces, deux faces opposées ayant la même aire. Donc $S = 2\times x\times 3x + 2\times x\times h + 2\times 3x\times h = 6x^2+8xh$.

(b) On suppose que le volume du réservoir est 4,5 m^3.

i. *Exprimer la hauteur h en fonction de x.* Puisque le volume nous est donné, on a $V = 3x^2h = 4,5$. Donc, en isolant h, on a $h = \frac{4{,}5}{3x^2} = \frac{3}{2x^2}$.

ii. *En déduire que la surface S est égale à $f(x)$ (où f est la fonction étudiée dans la question précédente).* On remplace donc h par $\frac{3}{2x^2}$ dans la formule de la surface, et on trouve $S = 6x^2 + 8x\frac{3}{2x^2} = 6x^2 + \frac{12}{x} = f(x)$.

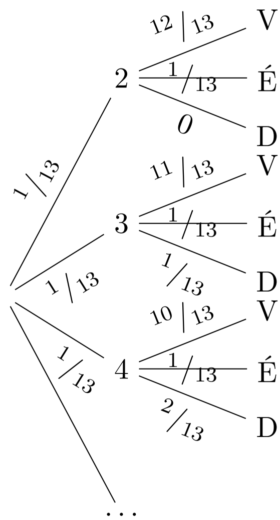
iii. *À l'aide de la première question, déterminer x tel que l'aire de S soit minimale. Donner alors les dimensions du réservoir.* Nous avons montré à la question précédente que f admet un minimum en 1. Donc l'aire est minimale pour $x = 1$, $h = \frac{3}{2\times 1^2} = \frac{3}{2}$, la troisième longueur étant $3x = 3$, toutes ces longueurs étant données en mètres.

Exercice 6 (Problème ouvert)**.** *Vous jouez au jeu suivant avec un ami : vous tirez chacun une carte d'un jeu de 52 cartes (l'as étant considéré comme la carte la plus forte). Si l'un des deux joueurs a une carte de valeur plus élevée que celle de l'autre joueur, il gagne. Sinon, il y match nul.*

Quelle est votre probabilité de victoire ?

Avec remise La probabilité est $\frac{6}{13}$. Voici quelques démonstrations ; il en existe d'autres.

Solution 1 On peut dessiner l'arbre de probabilités. Le premier niveau représente le tirage de votre adversaire ; le second le votre. La défaite, l'égalité et la victoire sont notées respectivement D, É, V.



La probabilité de victoire est donc la somme des probabilités des branches qui y mènent, soit $\frac{1}{13} \times \dfrac{12}{13} + \frac{1}{13} \times \dfrac{11}{13} + \frac{1}{13} \times \dfrac{10}{13} + \dots \frac{1}{13} \times \dfrac{1}{13} + \frac{1}{13} \times \dfrac{0}{13} = \dfrac{78}{13 \times 13} = \dfrac{6}{13}$.

Solution 2 Il est possible de dresser un tableau de toutes les issues possibles. La première ligne désigne votre carte ; la première colonne celle de votre adversaire.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité, donc votre probabilité de victoire est égale au nombre de cases V divisé par le nombre de cases total, soit $\frac{78}{13^2} = \frac{6}{13}$.

	2	3	...	As
2	É	V	...	V
3	D	É	...	V
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
As	D	D	...	É

Solution 3 Commençons par calculer la probabilité de match nul : quelle que soit la carte du premier joueur, le second a une chance sur treize de tirer la même. Donc cette probabilité est $\frac{1}{13}$. Il y a donc une probabilité de $\frac{12}{13}$ que l'un des deux joueurs gagne.

Vu la symétrie du jeu, les deux joueurs ont la même probabilité de victoire, soit $\frac{1}{2} \times \frac{12}{13}$, c'est-à-dire $\frac{6}{13}$.

Sans remise Les mêmes méthodes fonctionnent. Je ne donne ici que la dernière.

Solution 3 Le même raisonnement s'applique : la probabilité de match nul est $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$ (quelle que soit la carte que le premier joueur tire, il reste trois cartes identiques dans un jeu de 51 cartes). La probabilité de non-match nul est donc $\frac{17-1}{17} = \frac{16}{17}$.

Le jeu étant équilibré, la probabilité de victoire de chacun des joueurs est $\frac{1}{2} \times \frac{16}{17} = \frac{8}{17}$.