Devoir surveillé — Dérivation

Deux heures ; calculatrice autorisée.

Exercice 1 (Variations de fonctions)**.**

(1) *Déterminer les variations des fonctions suivantes.*

(a) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ *définie sur* $\mathbb{R}$. Fait en classe.

(b) $g : x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{2x+3}}$ *définie sur* $]-\frac{3}{2};+\infty[$. $x \mapsto 2x+3$ est une fonction affine, de coefficient directeur positif : elle est croissante. La fonction racine conserve les variations, donc $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est croissante. La fonction inverse inverse les variations, donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ est décroissante, et g aussi, car la multiplication par un réel positif ne change pas les variations.

(2) *On souhaite déterminer les variations de la fonction* f*, définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f : x \mapsto 3 - \sqrt{x^4 - 2x^3 + x^2 + 1}$.

(a) *Montrer que la dérivée de la fonction* $g : x \mapsto x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ *est, pour* $x \in \mathbb{R}$ *:* $g'(x) = 4x(x-\frac{1}{2})(x-1)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 4x^3 - 2\times 3x^2 + 2x = 4x^2 - 6x - +2x$. En retrouve la même chose en développant l'expression $4x(x-\frac{1}{2})(x-1)$, donc l'égalité est démontrée.

(b) *En déduire les variations de* g. Déterminons le signe de g.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x(x-\frac{1}{2})(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

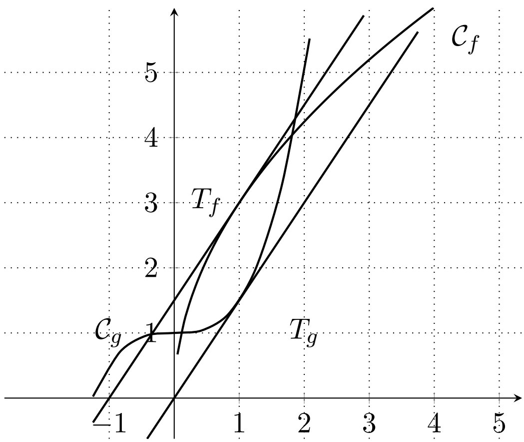
Nous en déduisons ses variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

(c) *En déduire les variations de f.* On remarque que $f(x) = 3 - \sqrt{g(x)}$. La fonction racine conserve les variations, et la multiplication par un réel négatif (ici -1) les inverse, donc les variations de f sont l'inverse des variations de g.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 2 (Tangentes)**.** On considère les fonctions $f : x \mapsto 3\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + 1$, définies sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.



(1) *Voir le graphique*

(2) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ et $g'(x) = \frac{3}{2}x^2$.

(3) L'équation de la tangente à f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Donc :

$$T_f : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{3}{2}(x-1) + 3 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

. De même, pour g :

$$T_g : y = g'(1)(x-1) + f(1) = \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}x$$

.

(4) *Voir le graphique.*

(5) T_f et T_g ont même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

Exercice 3 (Application à la physique)**.** (1) *Montrer que $c = 1\,024$.* Au moment du lâcher, la pomme est à une altitude de $1\,024\,\mathrm{m}$. Donc $z(0) = 1024$, et $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 1024$. Donc $c = 1024$.

(2) (a) $z'(t) = 2at + b$, donc $v(t) = 2at + b$.

(b) La vitesse initiale nulle se traduit par $v(0) = 0$, donc $2a \times 0 + b = 0$, et $b = 0$. Donc $v(t) = 2at$.

(c) Puisque $b = 0$, $z(t) = at^2 + 1024$.

(3) 14,5 s de chute signifie que la pomme atteint l'altitude 0 au bout de 14,5 s, donc $z(14,5) = 0$. Ainsi, $a \times 14,5^2 + 1024 = 0$, donc $a = -4,87$.

(4) $v(t) = 2at = -9,74t$, donc $v'(t) = -9,74$. C'est une constante égale à $-g$, donc $g = 9,74$.

Remarque : Cette technique fonctionne réellement pour calculer g, mais, d'une part elle n'est pas très précise, et d'autre part il existe une autre méthode, avec un pendule, bien plus précise et simple à mettre en œuvre. Demandez plus d'information à votre professeur de physique.

Exercice 4 (Fonctions homographiques)**.** (1) On note $u(x) = ax + b$ et $v(x) = cx + d$. Alors, $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, et :

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$h'(x) = \frac{ad - cb}{(cx+d)^2}$$

.

(2) Si $ad = cb$, alors $h'(x) = 0$ et la fonction h est constante.

(3) Si $ad \neq cd$. Alors si $ad - cb > 0$, $h'(x)$ est toujours positif, donc h est croissante. Au contraire, si $ab - cd < 0$, alors $h'(x)$ est toujours négatif, et h est décroissante.

(4)

```
Lire a
Lire b
Lire c
Lire d
Si ab−cd = 0
Alors
  Afficher "h est constante"
Sinon
  Si ab−cd > 0
  Alors
    Afficher "h est croissante"
  Sinon
    Afficher "h est decroissante"
  FinSi
FinSi
```