Devoir surveillé — Fonctions — Vecteurs

Exercice 1 (Fonctions — 5 points)**.** (a) $f : x \mapsto \dfrac{1-2x^2}{3}$ C'est un trinôme du second degré : il est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty; 0]$, et croissante ensuite. La multiplication par -2 inverse le sens de variations, et l'ajout et la division par une constante ne changent pas le sens de variations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	$\frac{1}{3}$	↘	

(b) $g : x \mapsto \sqrt{-x+7}$. Une racine n'est définie que sur les positifs. Donc g n'est définie que pour $-x+7 \geqslant 0$, soit pour $x \leqslant 0$: le domaine de définition est $]-\infty; 7]$.

La fonction $x \mapsto -x+7$ est décroissante (fonction affine avec coefficient directeur négatif), et la fonction racine conserve le sens de variations.

x	$-\infty$		7
g		↘	0

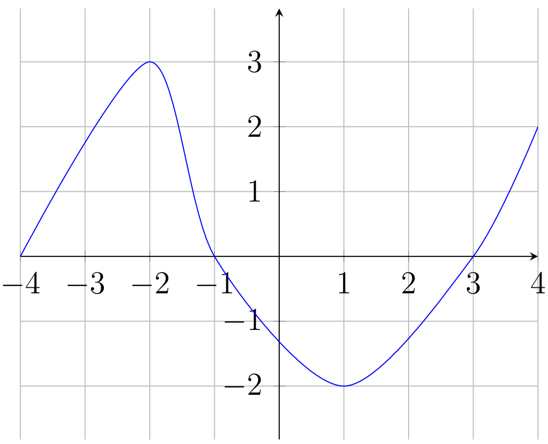
Exercice 2 (Fonctions — 5 points)**.** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la courbe $\mathcal{C}$ est représentée sur le graphique ci-contre.

(a) *Dresser le tableau de variations de f.* Voir question suivantes.

(b) *Déterminer l'ensemble de définition de $\frac{1}{f}$, puis dresser son tableau de variations.* La fonction $\frac{1}{f}$ n'est définie que si f est non nul, donc si x est différent de -4, -1 et 3. Donc $\mathcal{D}_{\frac{1}{f}} =]-4; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; 4]$.

En ce qui concerne le sens de variation, la fonction inverse les inverse. Le tableau est donc le suivant.

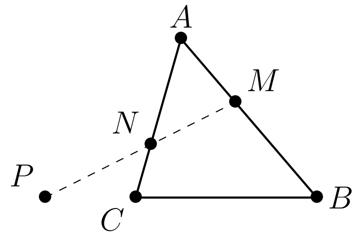
x	-4		-2		-1		1		3		4
f	0	↗	3	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	4
$\frac{1}{f}$	$\Vert$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\Vert$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$\Vert$	↘	$\frac{1}{4}$



Exercice 3 (Vecteurs — 5 points)**.** Soit ABC un triangle. On difinit les points M, N et P par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{CN} = 0$ et $\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

(a) *À l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AN}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$, puis faire une figure.*

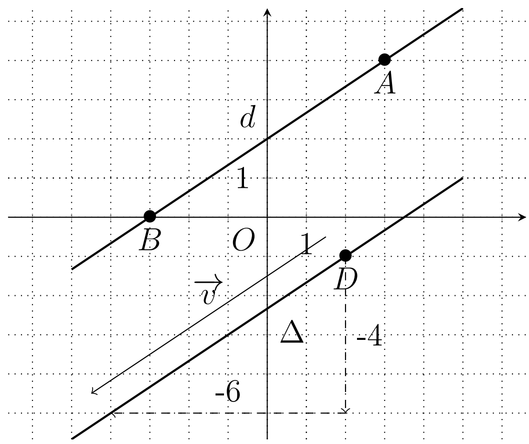
L'énoncé nous donne : $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{CN} = 0$.
Donc : $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{CN} = 0$
$\overrightarrow{AN} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}) = 0$
$3\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{CA} = 0$
$3\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



(b) *Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.* Commençons par appliquer la relation de Chasles : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$. Donc $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
De même, pour $\overrightarrow{MP}$: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$. Donc :
$\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
Or, comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Enfin, en factorisant, on trouve :
$\overrightarrow{MP} = -\frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

(c) *En déduire que les points M, N et P sont alignés.* Nous pouvons vérifier la condition de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $-\frac{2}{5} \times \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{9}{10}\right) = 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires, donc les points M, N et P sont alignés.

Exercice 4 (Droites — 5 points)**.** Le plan est rapporté au repère orthonormé ci-dessous.



(a) *Tracer la droite d d'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$.* Le coefficient directeur est $\frac{2}{3}$ (il se lit sur l'équation réduite). Une équation cartésienne de cette droite est $\frac{2}{3}x - y + 2 = 0$, et un vecteur directeur est donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

(b) Pour vérifier que $A(3;4)$ est un point de d, on remplace x par 3 dans l'équation de d : $\frac{2}{3} \times 3 + 2 = 4$, donc $A \in d$. Même principe pour B.

(c) *Construire la droite Δ passant par le point $D(2;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(-6,-4)$. Déterminer une équation cartésienne de Δ.*
Soit $M(x,y)$ un point de Δ. Alors $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires : $(x-2) \times -4 - (y+1) \times -6 = 0$. La seule difficulté restante est de faire attention aux signes. On trouve finalement : $-4x + 6y + 14 = 0$.

(d) *Démontrer que les droites d et Δ sont parallèles.* Vérifions que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires : $1 \times -4 - \frac{2}{3} \times -6 = 0$, donc les droites sont parallèles.