

Devoir surveillé — FONCTIONS

Corrigé

Exercice 1 (Cours — 2 points). Voir le cours.

Exercice 2 (Variation d'une fonction homographique — 4 points). Soit f la fonction définie par $x \mapsto \frac{2x+2}{x-4}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f , que l'on appellera \mathcal{D}_f par la suite.

Le dénominateur d'une fraction ne pouvant être nul, f n'est définie que si $x - 4 \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq 4$.

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{4\} =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ (ces deux écritures sont équivalentes).

(b) Démontrer que pour tout réel x de \mathcal{D}_f , $f(x) = 2 + \frac{10}{x-4}$.

Soit $x \in \mathcal{D}_f$ quelconque.

$$2 + \frac{10}{x-4} = \frac{2(x-4)}{x-4} + \frac{10}{x-4} = \frac{2(x-4) + 10}{x-4} = \frac{2x+2}{x-4} = f(x)$$


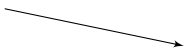



(c) Déterminer les variations de $x \mapsto x - 4$, puis celles de $x \mapsto \frac{1}{x-4}$, puis celles de f , sur \mathcal{D}_f .

$x \mapsto x - 4$ est une fonction affine de coefficient directeur positif : elle est croissante.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-4}$ étant l'inverse d'une fonction croissante, elle est décroissante sur $] -\infty; 4[$ et sur $]4; +\infty[$.

Enfin, puisque $f(x) = 2 + \frac{10}{x-4}$, et que le produit d'une fonction par un nombre positif (ici 10), et l'ajout d'un nombre à une fonction (ici 2) ne modifient pas les variations, f a les mêmes variations que $x \mapsto \frac{1}{x-4}$.

Il était aussi possible de présenter les résultats dans un tableau (mais les justifications en français restent nécessaires) :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x \mapsto x - 4$			
$x \mapsto \frac{1}{x-4}$			
f			

Exercice 3 (Valeur absolue — 4 points). *Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $|x - 2| + |x + 5| = 11$, appelée (E) par la suite.*

(a) *Premier cas : $x < -5$.*

(i) *Pour $x < -5$, simplifier l'expression $|x - 2| + |x + 5|$.*

La définition de la valeur absolue est :

$$\text{Pour } y \in \mathbb{R}, |y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Le réel x étant inférieur à -5 , $x - 2$ est négatif, donc $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$. De même, $|x + 5| = -(x + 5) = -x - 5$.
Donc $|x - 2| + |x + 5| = -x + 2 - x - 5 = -2x - 3$.

(ii) *Résoudre l'équation (E) pour $x < -5$.*

$$\begin{aligned} |x - 2| + |x + 5| &= 11 \\ -2x - 3 &= 11 \\ x &= \frac{14}{-2} = -7 \end{aligned}$$

Vérification (ça n'est pas demandé, mais je vous conseille de faire ça au brouillon) :

$$|-7 - 2| + |-7 + 5| = |-9| + |-2| = 9 + 2 = 11.$$

(b) *En utilisant la même méthode, résoudre l'équation (E) pour $x \in [-5; 2]$.*

Pour $x \in [-5; 2]$, $x - 2$ est négatif, et $x + 5$ est positif, donc :

$$\begin{aligned} |x - 2| + |x + 5| &= -(x - 2) + (x + 5) \\ &= -x + 2 + x + 5 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Donc l'équation $|x - 2| + |x + 5| = 11$ n'a pas de solutions sur cet intervalle.

(c) *En utilisant la même méthode, résoudre l'équation (E) pour $x > 2$.*

Enfin, dans ce cas, $x - 2$ et $x + 5$ sont positifs, donc $|x - 2| = x - 2$ et $|x + 5| = x + 5$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |x - 2| + |x + 5| &= 11 \\ (x - 2) + (x + 5) &= 11 \\ 2x + 3 &= 11 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

(d) *Conclure.* En faisant le bilan des trois cas étudiés, on en déduit que l'équation (E) a deux solutions : -7 et 4 .