

Exercice 1 (Suites — 9 points).

1. On note u_0 le premier remboursement et u_1, u_2, \dots les remboursements suivants, et on admet que u est une suite arithmétique de premier terme 15 000 et de raison 1 800.

(a) *Quel est le montant du dernier versement ?* Il y a sept remboursements à faire, de u_0 à u_6 . Le dernier est donc :

$$u_6 = u_0 + 6r = 15000 + 6 \times 1800 = 25800 \text{ €}.$$

(b) *Quel est le total des sept versements ?* La somme de termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$\text{Donc la somme des versements est } 7 \times \frac{15000 + 25800}{2} = 142800 \text{ €}.$$

2. La banque B lui propose de rembourser ce prêt sur sept ans, en sept versements : le premier remboursement serait d'un montant de 20 000 euros et les remboursements suivants augmenteraient de 2 % par rapport au remboursement précédent.

On note v_0 le premier remboursement et v_1, v_2, \dots les remboursements suivants.

(a) *Calculer v_1 et v_2 .*

$$v_1 = v_0 + 0,02 \times v_0 = v_0(1 + 0,02) = v_0 \times 1,02 = 20400 \text{ €}$$

$$\text{De même, } v_2 = 1,02 \times v_1 = 20808 \text{ €}$$

(b) *On admet que (v_n) est une suite géométrique. Donner son premier terme et sa raison. C'est une suite géométrique de premier terme 20000 et de raison 1,02.*

(c) *Quel est le total des sept versements ?* La somme de termes d'une suite géométrique est donnée par la formule

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$\text{Le total versé est donc } 20000 \frac{1 - 1,02^7}{1 - 1,02} \approx 148685,67 \text{ €}.$$

3. *Quelle est la proposition la plus avantageuse ?* La première proposition, qui coûterait au total environ 142000 euros, est plus avantageuse que la seconde, qui coûterait environ 149000 euros.

Exercice 2 (Loi binomiale — 11 points).

1. On s'intéresse à l'expérience aléatoire « On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces », et on appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de 1 obtenus.

(a) Cette variable X suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ? Il s'agit de 4 répétitions d'une expérience ayant une probabilité $\frac{1}{6}$ de succès (car le dé est équilibré), donc X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{6}$.

(b) Calculer $P(X = 0)$. Cette probabilité est donnée par la formule $P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,48$.

(c) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} de $P(X \geq 1)$. Puisque les événements $X \geq 1$ et $X = 0$ sont contraires, on a : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,48 \approx 0,52$.

2. On considère la seconde expérience aléatoire : « On lance huit fois de suite un dé équilibré à six faces », et on appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de 1 obtenus, et on admet qu'elle suit une loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{1}{6}$.

(a) $P(Y = 0) = \binom{8}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{8-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^8$

$$P(Y = 1) = \binom{8}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{8-1} = 8 \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{4}{3} \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

(b) Puisque les événements $X = 0$ et $X = 1$ sont incompatibles, on a :

(c) Les événements $Y \geq 2$ et $Y \leq 1$ étant contraires, on a :

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) & P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y \leq 1) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \frac{8}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^7 & &= 1 - \frac{13}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &= \left(\frac{5}{6} + \frac{8}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^7 & &\approx 0,40 \\ &= \frac{13}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^7 \end{aligned}$$

3. La première probabilité est 0,52, et la seconde 0,40 : il y a plus de chances d'obtenir un 1 en quatre lancers que deux 1 en huit lancers.