

DEVOIR SURVEILLÉ — Une heure

Exercice 1 (Cours et application directe — 6 points).

Les questions sont indépendantes.

1. Soit u la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 3$, et pour $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = 2u_n - 4$.
 - (a) Calculer u_2 .
 - (b) Donner le cinquième terme de cette suite.
2. Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 8$ et de raison 3. Quelle est la formule explicite de v_n (pour $n \in \mathbb{N}$) ?
3. Soit w la suite définie par $w_0 = 1729$, et pour $n \in \mathbb{N}$,
 $w_{n+1} = 2w_n + 1$. On admet que tous les termes de w sont strictement positifs. Déterminer les variations de w .
4. Démontrer que pour tout entier n non nul, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2 (Algorithmique — 5 points).

Adapté du Bac S 2012.

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$.

On considère l'algorithme suivant.

Lire n
 $0 \rightarrow u$
Pour k allant de 1 à n
Faire
 $u + k^2 \rightarrow u$
FinPour
Afficher u

1. Donner la valeur affichée par cet algorithme si l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.
2. Modifier l'algorithme afin qu'il affiche la valeur de u_n si l'utilisateur entre la valeur de n .

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3} .

n	5	10	20	50	100	1000
u_n	0,440	0,385	0,358	0,343	0,338	0,334

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variations de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

Exercice 3 (Géométrie — 6 points). On considère les points $A(2; 1)$ et $B(1; 2)$ dans un repère orthonormé.

- Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$.
- On appelle Δ la médiatrice du segment $[AB]$ (rappel : la médiatrice de $[AB]$ est la droite constituée de l'ensemble des points à égale distance de A et B).

Soit $M(x; y)$ un point de Δ .

- Exprimer AM^2 et BM^2 en fonction de x et y .
 - Montrer que l'équation réduite de Δ est $y = x$.
3. En déduire les points d'intersection de \mathcal{C} et de Δ .

Exercice 4 (Perpendicularité — 3 points). *Toute trace de recherche sera valorisée, même si elle n'aboutit pas.*

On considère la figure ci-contre. $ABCD$ et $AEFG$ sont des carrés, et $ABHG$ est un rectangle.

Démontrer que les droites (ED) et (AH) sont perpendiculaires.

