# Devoir surveillé — Correction

**Exercice 1** (Cours et application directe — 7 points)**.**

*Les questions sont indépendantes.*

1. *Soit $u$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 4$.*
   (a) *Calculer $u_2$.* $u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 3 - 4 = 2$, et $u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times 2 - 4 = 0$.
   (b) *Donner le cinquième terme de cette suite.* La difficulté ici est de ne pas se tromper d'indice : $u_0$ est le premier terme, $u_1$ le deuxième, …et $u_4$ le cinquième. Le cinquième terme est donc $u_4 = -12$.
2. *Soit $v$ la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 8$ et de raison 3. Quelle est la formule explicite de $v_n$ (pour $n \in \mathbb{N}$) ?* $v_n = v_0 + r \times n$ (où $r$ est la raison), donc $v_n = 8 + 3n$.
3. *Soit $w$ la suite définie par $w_0 = 1729$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n + 1$. On admet que tous les termes de $w$ sont strictement positifs. Déterminer les variations de $w$.* Il y a différentes méthodes ; nous allons ici calculer la différence $w_{n+1} - w_n$ : $w_{n+1} - w_n = 2w_n + 1 - w_n = w_n + 1$. Or $w_n$ est positif, donc $w_n + 1$ aussi, donc $w_{n+1} - w_n$ est positif : la suite est croissante.
4. *Démontrer que pour tout entier $n$ non nul, on a :* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Voir le cours.

**Exercice 2** (Algorithmique — 6 points)**.**

*Adapté du Bac S 2012.*

Soit $u$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. On considère l'algorithme suivant.

```
Lire n
0 → u
Pour k allant de 1 a n Faire
   u + k^2 → u
FinPour
Afficher u
```

1. *Donner la valeur affichée par cet algorithme si l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.* Pour $n = 3$, le contenu de la boucle est exécutée 3 fois. À la fin de la première fois, $u$ vaut $0 + 1^2 = 1$ ; à la fin de la deuxième fois, $u$ vaut $1 + 2^2 = 5$ ; et enfin, la troisième fois, $u$ vaut $5 + 3^3 = 14$.

2. *Modifier l'algorithme afin qu'il affiche la valeur de $u_n$ si l'utilisateur entre la valeur de $n$.* L'algorithme calcule la valeur $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Pour obtenir $u_n$, il suffit donc de diviser par $n^3$. Il faut donc remplacer la dernière ligne « **Afficher** u » par « **Afficher** $\frac{u}{n^3}$ ».

3. *Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à $10^{-3}$.*

| $n$ | *5* | *10* | *20* | *50* | *100* | *1000* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | *0,440* | *0,385* | *0,358* | *0,343* | *0,338* | *0,334* |

*À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variations de la suite $(u_n)$ et son éventuelle limite.* N'importe quelle conjecture cohérente est valide. Le comportement réel de cette suite est : elle est strictement décroissante, et tend vers $\frac{1}{3}$.

**Exercice 3** (Géométrie — 7 points)**.** On considère les points $A(2;1)$ et $B(1;2)$ dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.* La formule générale d'une équation du cercle est $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$, donc cela donne $(x - 2)(x - 1) + (y - 1)(y - 2) = 0$.
2. *On appelle $\Delta$ la médiatrice du segment $[AB]$ (rappel : la médiatrice de $[AB]$ est la droite constituée de l'ensemble des points à égale distance de $A$ et $B$).*

   *Soit $M(x; y)$ un point de $\Delta$.*

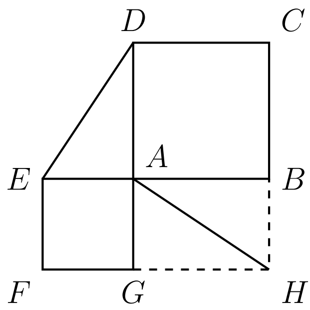
   (a) *Exprimer $AM^2$ et $BM^2$ en fonction de $x$ et $y$.* La longueur d'un segment en fonction des coordonnées de ses extrémités est donnée par la formule $AM = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$, donc $AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$. De même, $BM^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$.

   (b) *Montrer que l'équation réduite de $\Delta$ est $y = x$.* Puisque la $M$ est sur la médiatrice de $[AB]$, $AM = BM$, et $AM^2 = BM^2$. Donc $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$. En développant cet expression et en isolant les $x$ à gauche et les $y$ à droite, on obtient $x = y$.
3. *En déduire les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\Delta$.* Soit un point $M(x; y)$ appartenant à $\mathcal{C}$ et $\Delta$. Ce point vérifie donc les deux équations trouvées en 1 et 2b. En particulier, puisque $y = x$, on peut remplacer $y$ par $x$ dans l'équation de $\mathcal{C}$ pour obtenir $(x - 2)(x - 1) + (x - 1)(x - 2) = 0$, soit $2(x - 2)(x - 1) = 0$. C'est une équation produit qui a deux solutions : $x = 1$ et $x = 2$.

   Ce sont les abcisses des deux points d'intersection. Les ordonnées sont données par la formule de la droite $y = x$. Donc les deux points d'intersection ont pour coordonnées $(1, 1)$ et $(2, 2)$.

**Exercice 4** (Perpendicularité — 3 points)**.** *Toute trace de recherche sera valorisée, même si elle n'aboutit pas.*

*On considère la figure ci-contre. $ABCD$ et $AEFG$ sont des carrés, et $ABHG$ est un rectangle.*




*Démontrer que les droites $(ED)$ et $(AH)$ sont perpendiculaires.*

Il y a différentes manières de résoudre cet exercice (dont une est faisable en début de collège). Nous allons ici utiliser les vecteurs.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH}$. En utilisant la relation de Chasles, nous obtenons :

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}\right) . \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH}\right)$

Nous développons :

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GH}$

$(EA)$ et $(AG)$ sont perpendiculaires, de même que $(AD)$ et $(GH)$, donc les produits scalaires $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GH}$ sont nuls. Donc :

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG}$

Restent deux produits scalaires. On note que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GH} = EA.GH$ (car $\cos(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{GH}) = 1$), et que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG} = -AD.AG$ (car $\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG}) = -1$). Enfin, puisque $EA = AG$ et $GH = AD$, on a :

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = EA.GH - AD.AG = EA.GH - GH.EA = 0.$

Donc $(ED)$ et $(AH)$ sont perpendiculaires.