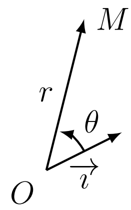
Devoir à la maison
Coordonnées polaires

Définition. On appelle *repère polaire* du plan tout couple $(O, \overrightarrow{\imath})$, où O est un point appelé origine (ou pôle), et $\overrightarrow{\imath}$ un vecteur de norme 1.

Pour tout point M du plan distinc de O, il existe un couple (r, θ) avec r un nombre strictement positif, et θ un nombre réel tels que : $OM = r$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



On dit que (r, θ) est un couple de *coordonnées polaires* de M dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath})$.

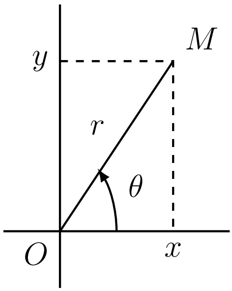
Remarque.

— À chaque couple (r, θ) avec $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$ correspond un unique point du plan.

— À un point M du plan distinct de O correspond une infinité de couples (r, θ) avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, car θ est défini à $2k\pi$ près.

— On convient que le pôle O a pour coordonnées $(0, \theta)$ avec θ quelconque.

1. Démontrer la propriété suivante : Si le point M a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ dans le repère orthonormal vecteur $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et pour coordonnées polaires (r, θ) dans le repère polaire $(O, \overrightarrow{\imath})$, alors on a $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Soient $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct d'unité 2 cm, et $(0, \overrightarrow{\imath})$ le repaire polaire associé. On considère les points A de coordonnées cartésiennes $(-2, 2)$, B de coordonnées polaires $\left(2; \frac{3\pi}{4}\right)$, et C de coordonnées polaires $(1, \alpha)$, où $\alpha \in [\pi; 2\pi[$ est tel que $\cos\alpha = \frac{1}{4}$

2. Faire une figure.
3. Calculer $\sin\alpha$, et déterminer les coordonnées cartésiennes de C.
4. Déterminer les coordonnées cartésiennes de B.
5. Déterminer les coordonnées polaires de A.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur r et θ pour qu'un point M quelconque du plan de coordonnées polaires (r, θ), avec $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$ appartienne à la demi-droite $]OA)$.
7. Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. En déduire les coordonnées cartésiennes du centre du cercle circonscrit au triangle OAB.
8. Hachurer la surface constituée des points M de coordonnées polaires (r, θ) avec $r \in [1; \sqrt{2}]$ et $\theta \in \left]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[$. Déterminer l'aire de cette surface.