

DEVOIR À LA MAISON
Variables aléatoires

Exercice 1 (Jeu infini). Une kermesse propose le jeu suivant : un joueur lance un dé équilibré à six faces. Si 2, 3, 4, 5 ou 6 est obtenu, il gagne le nombre de bonbons indiqués sur le dé et le jeu s'arrête. Si 1 est obtenu, il gagne un bonbon, et relance le dé pour le même jeu.

Par exemple : un joueur lance le dé et obtient 1 : il gagne un bonbon et rejoue. Il fait à nouveau 1 : il gagne un second bonbon. Il relance le dé et obtient 3 : il gagne trois bonbons et le jeu s'arrête. Il a gagné au total 5 bonbons.

L'objet de l'exercice est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X associée au nombre de bonbons gagnés à ce jeu. La formule vue en cours ne peut pas être utilisée car le nombre de lancers n'étant pas limité, l'univers est infini.

On fait alors l'hypothèse suivante : sur un 1, plutôt que relancer le dé, on gagne $1 + E(X)$, c'est-à-dire 1 plus le gain moyen obtenu sur le second lancer. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont alors $\{1 + E(X), 2, 3, 4, 5, 6\}$.

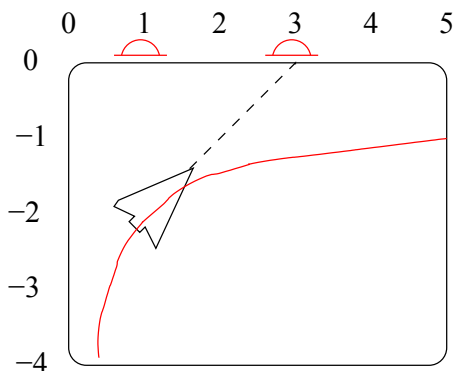
1. Dresser la loi de probabilité de X .
2. En utilisant la formule de l'espérance vue en cours, montrer que $E(X) = \frac{21 + E(X)}{6}$.
3. Résoudre l'équation pour déterminer $E(X)$.

Pour être rigoureux, avec cette méthode, nous n'avons pas prouvé que $E(X)$ est égale à la valeur trouvée à la question précédente : nous avons seulement montré que *si l'espérance $E(X)$ existe*, elle est égale à cette valeur.

4. Modifier cette expérience aléatoire, ou en inventer une nouvelle, telle que le calcul précédent ne donne pas un résultat correct. Expliquer l'erreur.

Exercice 2 (Tangente). La figure ci-dessous représente un écran de jeu vidéo. Un avion remonte l'écran de gauche à droite en suivant la courbe d'équation $y = -1 - \frac{1}{x}$

L'avion peut tirer des missiles selon la tangente à sa trajectoire.



1. Calculer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .
(On ne demande pas de réduire la formule)
2. En quels points de sa trajectoire, l'avion doit-il tirer ses missiles pour abattre successivement les deux monstres situés en haut de l'écran en $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), B\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

Exercice 3 (Histoire). Citer une mathématicienne et dire pourquoi elle est connue.