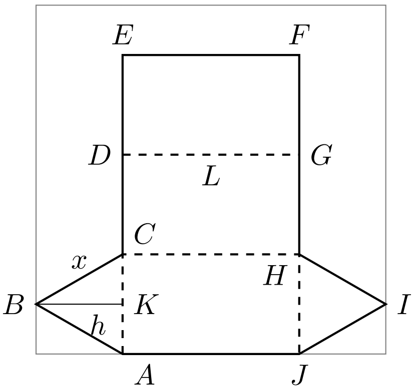
Devoir à la maison — Corrigé
Analyse

Exercice 1 (Optimisation)**.**



Le patron est construit dans un carton carré de côté 21 cm. Les triangles ABC et HIJ sont équilatéraux ; les longueurs AC, CD et ED sont égales à BC ; les quadrilatères $ACHJ$, $CHGD$ et $DGFE$ sont des rectangles.

On appelle x la longueur BC, L la longueur DG, et h la longueur BK, hauteur du triangle ABC.

Les pointillés marquent les traits de pliure.

1. Calculs préliminaires
   (a) *Montrer que* $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$*.*
   Il y a (au moins) deux manières de prouver cela.

   Pythagore Le triangle CKB étant rectangle en K, on y applique le théorème de Pythagore : $BC^2 = BK^2 + KC^2$. Donc $x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$, et on en déduit h en l'isolant.

   Trigonométrie Le triangle BCK étant rectangle, $\widehat{BKC} = 90^o$; le triangle ABC étant équilatéral, $\widehat{KCB} = 60^o$. Donc $\widehat{CBK} = 30^o$, et $\cos 30 = \frac{h}{x}$. Puisque $\cos 30^o = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit le résultat demandé.

   (b) *Exprimer la longueur L en fonction de x.* En considérant le segment $[BI]$, de longueur 21, on a : $21 = 2h + L = 2\frac{\sqrt{3}}{2}x + L$. Donc $L = 21 - \sqrt{3}x$.

2. *Quelles valeurs peut prendre x ?* Étudions cette fois le segment $[AE]$, égal à $3x$. Ce segment doit être inférieur à 21, donc $3x \leqslant$

21, c'est-à-dire $x \leqslant 7$. De plus, x est une longueur, donc positif. Ainsi : $x \in [0;7]$.

3. Étude de la fonction volume
   (a) La boîte est un prisme droit à base triangulaire. Son volume est égal au produit de l'air de la base par sa hauteur. Donc
   $V = \mathcal{A}_{ABC} \times L = \frac{h \times x}{2} \times L = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \times x \times (21 - \sqrt{3}x)$.
   En développant, cela donne : $V = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{21\sqrt{3}}{4}x^2$.

   (b) *Montrer que la fonction V est dérivable, et calculer sa dérivée.*
   V est une fonction polynôme : elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :
   $$V'(x) = -\frac{3}{4} \times 3x + \frac{21\sqrt{3}}{4} \times 2x = -\frac{9}{4}x^2 + \frac{21\sqrt{3}}{2}x$$

   (c) *Résoudre $V'(x) \geqslant 0$.* V' est un polynôme du second degré. Nous pouvons utiliser nos connaissances sur les trinômes pour résoudre cette inéquation. Je propose une autre méthode. Une racine évidente étant $x = 0$, on peut factoriser V' : $V'(x) = x\left(-\frac{9}{4}x + \frac{21\sqrt{3}}{2}\right)$.
   Un tableau de signe nous donne ensuite : $V'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0; \frac{14\sqrt{3}}{3}]$.

   (d) *Dresser le tableau de variation de V.*

x	$-\infty$		0		$\frac{14\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$V'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
V		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

4. *Conclure : Quelle valeur doit prendre x pour que la boîte ait le plus gros volume ?* Le tableau de variation nous donne un maximum pour V en $x = \frac{14\sqrt{3}}{3}$. Mais nous avions montré à la question 2 que $x \leqslant 7$. Or $\frac{14\sqrt{3}}{3} \approx 8,1$. Donc la valeur maximale de V est atteinte pour $x = 7cm$.