

Fonctions — DM

À rendre le mardi 15 octobre.

Exercice 1 (Polynômes du second degré). Calculer la valeur du nombre suivant.

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Exercice 2 (Somme et produit de fonctions). Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I .

Somme de fonctions On note f la fonction somme $u+v$ définie sur I par $f(x) = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$.

- (a) On suppose que les fonctions u et v sont croissantes sur I . Étudier le sens de variation de f sur I .
- (b) On suppose que les fonctions u et v sont décroissantes sur I . Étudier le sens de variation de f sur I .
- (c) Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation des fonctions u , v , f sur \mathbb{R} : $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = -\frac{x}{2} + 3$; $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 2x + 4$; $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x + 1$.
- (d) Commenter l'affirmation : *La somme de deux fonctions monotones sur un intervalle I est monotone sur I .*

Produit de fonctions On note g le produit $u \times v$ défini par $g(x) = (u \times v)(x) = u(x) \times v(x)$.

- (e) Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation des fonctions u , v , g sur \mathbb{R} : $u(x) = x$ et $v(x) = x + 1$; $u(x) = -x$ et $v(x) = -x + 1$.

- (f) Répondre par *vrai* ou *faux*, en justifiant.
- Le produit de deux fonctions croissantes sur un intervalle I est une fonction croissante sur I .
 - Le produit de deux fonctions décroissantes sur un intervalle I est une fonction décroissante sur I .
 - Le produit de deux fonctions monotones sur un intervalle I est une fonction monotones sur I .

Exercice 3 (Fonction cube). On appelle *fonction cube* la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^3$.

- (a) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les variations de cette fonction sur \mathbb{R} .
- (b) Justifier que, si $a < 0 < b$, alors $a^3 < b^3$.
- (c) (i) Montrer que pour tous réels a et b , on a :
- $$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
- (ii) Quel est le signe de $a^2 + ab + b^2$ si a et b sont de même signe ?
- (d) Dédire des questions précédentes que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $a^3 < b^3$. Conclure.
- (e) Établir le tableau de variation de la fonction cube.
- (f) Tracer sur l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions carré et cube. Étudier (par le calcul) les positions relatives de ces deux courbes.